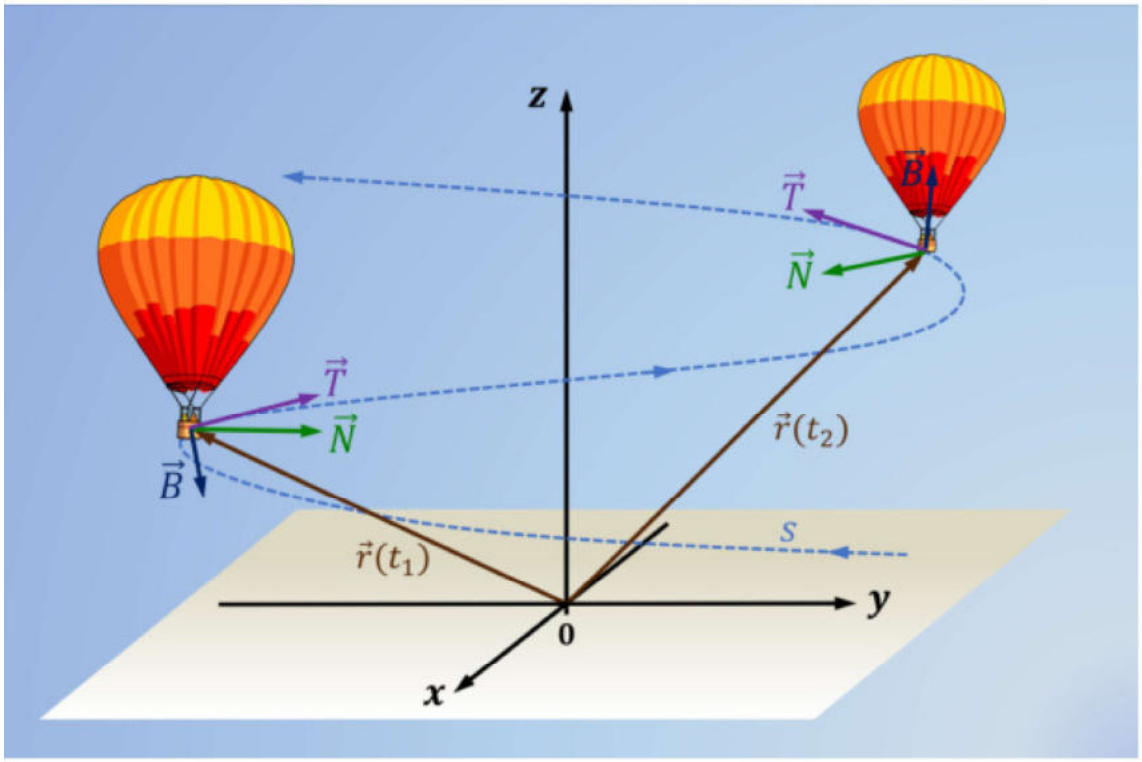
Thomas Amenda

Elemente der Kinematik

Zwischen Oberstufe und Grundstudium



2. Auflage

Lehrbuch

BoD

Elemente der Kinematik

Für meinen lieben Vater Ing. grad. Alfons Amenda (1942 - 2016)

Thomas Amenda

Elemente der Kinematik

Zwischen Oberstufe und Grundstudium

2. überarbeitete und erweiterte Auflage

Lehrbuch **Books on Demand**

Dr. rer. nat. Thomas Amenda

BBS Ammerland
FB Naturwissenschaften
Elmendorfer Straße 59
26160 Bad Zwischenahn
thomas.amenda@bbs-ammerland.de
http://www.bbs-ammerland.de

info@elementederkinematik.de
http://www.elementederkinematik.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

2. überarbeitete und erweiterte Auflage (PDF-Version vom 02.02.2022)

Satz und Layout mit LaTeX

© 2022 Thomas Amenda

Herstellung und Verlag: BoD - Books on Demand, Norderstedt

ISBN 978-3-7557-5286-8

Vorwort

Traditionell beginnen die Mechanik-Kurse an deutschen Schulen und Hochschulen mit der Lehre der Kinematik. Fachdidaktische Untersuchungen zeigen jedoch, dass gerade die Kinematik für Lernende ein eher schwieriges Teilgebiet der Mechanik darstellt. Ein Hauptgrund dafür liegt in dem Vektorcharakter der wesentlichen Beschreibungsgrößen Ort, Ortsverschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung begründet. Hinzu kommen die skalaren Größen Weg und Tempo, die zur Beschreibung von Bewegungen benötigt werden. Außerdem unterscheidet man noch zwischen Durchschnitts- und Momentanwerten. Und zu guter Letzt werden mit Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung auch noch axiale Vektoren verwendet. Da ist es nicht verwunderlich, dass Schüler, aber auch manche Studenten in den Grundkursen der ersten Semester Schwierigkeiten mit dem Verständnis der Kinematik haben.

Die meisten Schulbücher verzichten auf eine konsequent vektorielle Darstellung und behandeln vektorielle Größen einfach genau so wie Skalare. Zusätzlich werden die Größen Ort und Weg nicht konsequent unterschieden. Und die zur Definition der Geschwindigkeit notwendige Ortsverschiebung wird gar nicht erst eingeführt.

Vielfach entstehen zudem fachliche Inkonsistenzen durch eine starke Reduktion der Mathematik, wie z.B. der Verzicht auf die Vektorrechnung im Rahmen einer fachgerechten Elementarisierung der Hochschulphysik. Mein wesentlicher Leitgedanke war es hier, sich den „Feind Mathematik“ zum Freund zu machen und die Stringenz des Vektorformalismuses zu nutzen, um die verschiedenartigen Beschreibungsgrößen zu bündeln. Hier wird mit einem konsequent vektoriellen Ansatz ein Konzept angeboten, das alle genannten Größen konsistent darstellt und sie in einen funktionalen Rahmen einordnet, wie dies in der Hochschulphysik auch üblich ist. Somit richtet sich dieses Buch in erster Linie an angehende Studenten der ingenieur- und naturwissenschaftlichen Studiengänge, die vorhandene Lücken im Verständnis der Kinematik schließen möchten oder an Menschen die einfach nur, so wie ich, Spaß an der Physik haben.

Mein herzlicher Dank gilt Dipl.-Ing. Karl Withake von den BBS Ammerland für die kritische Durchsicht des Manuskripts und die hilfreichen Verbesserungsvorschläge. Dipl.-Ing. Jens Meyerhoff, ebenfalls von den BBS Ammerland, danke ich für die vielen anregenden Diskussionen. Danken möchte ich auch Prof. Dr. Horst Schecker vom IDN der Universität Bremen für die ermunternden und motivierenden Worte. Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Ingrid für das Korrekturlesen und ihr Verständnis, dieses Buch unbedingt schreiben zu müssen.

Alle übersehenen Fehler gehen natürlich auf meine Kappe. Für Anregungen und Kritik bin ich immer dankbar. Auf der Website zum Buch www.elementederkinematik.de werden alle mir mitgeteilten Fehler und Verbesserungen veröffentlicht.

Oldenburg, im Frühjahr 2020 *Thomas Amenda*

Vorwort zur zweiten Auflage

In dieser zweiten Auflage wurden zunächst kleinere Fehler korrigiert sowie einige Verbesserungen und Umstrukturierungen vorgenommen. Neu hinzu gekommen ist ein Kapitel zum Lagrange-Formalismus sowie eines über Schwingungen. Ich hoffe dadurch nun alle wesentlichen Elemente der Kinematik berücksichtigt zu haben, damit der Einstieg in ein natur- oder ingenieurwissenschaftliches Studium gut gelingt.

Die im Rahmen meines Forschungsprojektes am IDN der Universität Bremen und meiner langjährigen Lehrtätigkeit an den BBS Ammerland entwickelte Unterrichtskonzeption zur Lehre der Kinematik für Oberstufenschüler, stelle ich gerne allen interessierten Kollegen, Referendaren und (Lehramts-)Studenten zur Verfügung. Die notwendigen Unterlagen, bestehend aus einem 35-seitigen Skript, einer Formelsammlung sowie einer kleinen Animation zum Einstieg, stehen auf der Website zum Buch zum Download zur Verfügung. Die detaillierten Lösungen können selbstverständlich vorab bei mir per E-Mail angefordert werden. An einem Erfahrungsaustausch mit Kollegen bin ich nach wie vor sehr interessiert.
Eine kurze Vorstellung meiner Kinematik-Konzeption findet sich auch in dem von T. Wilhelm, H. Schecker und M. Hopf herausgegebenen Lehrbuch *Unterrichtskonzeptionen für den Physikunterricht - Ein Lehrbuch für Studium, Referendariat und Unterrichtspraxis.*

Mein herzlicher Dank gilt auch hier wieder Dipl.-Ing. Karl Withake von den BBS Ammerland für die kritische Durchsicht des Manuskripts und die hilfreichen Verbesserungsvorschläge. Mein ganz besonderer Dank gilt wie immer meiner Frau Ingrid für das Korrekturlesen und ihr Verständnis, dieses Buch unbedingt noch verbessern und erweitern zu müssen.

Natürlich gehen alle übersehenen Fehler auch weiterhin auf meine Kappe. Für Anregungen und Kritik bin ich immer dankbar. Alle mir bekannten Fehler und Verbesserungen werden selbstverständlich auf der Website zum Buch veröffentlicht. Auf der Website stehen auch weiterhin die den Simulationen, Modellierungen und Diagrammen zugrunde liegenden Dateien zum Download bereit.

Oldenburg, im Winter 2021/22 *Thomas Amenda*

Formelzeichen

t, t_i	Allgemeiner bzw. i-ter Zeitpunkt	s
t_0	Startzeitpunkt, fast immer $t_0 = 0$	s
t_1, t_a	Anfang eines beliebigen Zeitintervalls	s
t_2, t_e	Ende eines beliebigen Zeitintervalls	s
t_{ges}	Gesamtzeit einer Bewegung mit $t_0 = 0$	s
$\Delta t, \Delta t_i$	Allgemeines Zeitintervall bzw. i-tes Zeitintervall	s
dt	Infinitesimal kleines Zeitintervall	s
$\mathrm{P}(x/y/z)$	Raumpunkt im $\mathbb{R}^3$	-
x, y, z	Koordinaten im $\mathbb{R}^3$	m
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$ (orthogonale Basis)	1
$\vec{r}$	Ortsvektor	m
$r_\perp, r_\parallel$	Senkrechte bzw. parallele Komponente des Ortsvektors	m
$\vec{r}_0, \vec{r}(t_i)$	Ort zum Zeitpunkt t_0 bzw. t_i	m
$\vec{r}(t)$	Ortsfunktion	m
$\Delta\vec{r}(\Delta t)$	Ortsverschiebung im Zeitintervall Δt	m
$\Delta\vec{r}(t_1, t_2)$	Ortsverschiebung zwischen t_1 und t_2	m
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Komponenten des Ortsverschiebungsvektors	m
$\lvert\Delta\vec{r}(\Delta t)\rvert$	Betrag der Ortsverschiebung im Zeitintervall Δt	m
$\lvert\Delta\vec{r}(t_1, t_2)\rvert$	Betrag der Ortsverschiebung zwischen t_1 und t_2	m
$d\vec{r}(t)$	Infinitesimal kleine Ortsverschiebung zum Zeitpunkt t	m
$\lvert d\vec{r}(t)\rvert$	Betrag der infinitesimal kleinen Ortsverschiebung	m
dx, dy, dz	Komponenten der infinitesimal kleinen Ortsverschieb.	m
$\Delta s(\Delta t)$	Im Zeitintervall Δt zurückgelegtes Wegelement	m
$ds(t)$	Infinitesimal kleines Wegelement zum Zeitpunkt t	m
$s_{ges}(t_{ges})$	Gesamtweg zum Zeitpunk t_{ges}	m
$\vec{v}(t)$	Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t	m/s
$\vec{v}(t_1, t_2)$	Geschwindigkeit im Zeitintervall von t_1 bis t_2	m/s
$\lvert\vec{v}(t)\rvert$	Geschwindigkeitsbetrag zum Zeitpunkt t	m/s
v_x, v_y, v_z	Komponenten des Geschwindigkeitsvektors	m/s
$\vec{v}_0$	Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0	m/s
v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}	Komponenten des Geschwindigkeitsvektors bei t_0	m/s
$\vec{v}_B$	Bahngeschwindigkeit (Drehbewegungen)	m/s

$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit (Drehbewegungen)	rad/s
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Komponenten des Winkelgeschwindigkeitsvektors	rad/s
φ	Winkel im Bogenmaß, Drehwinkel	rad
α, β	Winkel im Gradmaß	$^\circ$
$\vec{\alpha}(t)$	Winkelbeschleunigung zum Zeitpunkt t	$1/s^2$
$\vec{e}_v$	Einheitsvektor in Richtung der Geschwindigkeit	1
$\vec{e}_v(t)$	Richtung der Geschwindigkeit zum Zeitpunk t	1
$\vec{e}_v(t_1, t_2)$	Richtung der Geschwindigkeit von $t_1$bis t_2	1
$\vec{e}_{\bar{a}}$	Richtung der Durchschnittsbeschleunigung	1
$\Delta\vec{e}_v(\Delta t)$	Richtungsänderung der Geschwindigkeit in Δt	1
$\vec{e}_{\Delta v}$	Richtung der Geschwindigkeitsänderung	1
$\bar{\vec{v}}(\Delta t)$	Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall Δt	m/s
$\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z$	Komponenten der Durchschnittsgeschwindigkeit	m/s
$\bar{\vec{v}}(t_1, t_2)$	Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen t_1 und t_2	m/s
$\bar{u}(\Delta t)$	Durchschnittstempo im Zeitintervall Δt	m/s
$u(t)$	Tempo zum Zeitpunkt t	m/s
$\Delta\vec{v}(\Delta t)$	Geschwindigkeitsänderung im Zeitintervall Δt	m/s
$\Delta\lvert\vec{v}\rvert(\Delta t)$	Tempoänderung im Zeitintervall Δt	m/s
$\Delta\vec{v}(t_1, t_2)$	Geschwindigkeitsänderung von t_1 und t_2	m/s
$d\vec{v}(t)$	Infinitesimal kleine Geschwindigkeitsänderung	m/s
$\vec{a}(t)$	Momentanbeschleunigung	m/s^2
$\bar{\vec{a}}(\Delta t)$	Durchschnittsbeschleunigung im Zeitintervall Δt	m/s^2
$\bar{\vec{a}}(t_1, t_2)$	Durchschnittsbeschleunigung zwischen t_1 und t_2	m/s^2
$\vec{e}_a(t)$	Richtung der Beschleunigung zum Zeitpunk t	1
$\vec{e}_{\bar{a}}(\Delta t)$	Richtung der Durchschnittsbeschleunigung in Δt	1
$\vec{g}$	Fallbeschleunigung (Ortsfaktor) mit $\lvert\vec{g}\rvert = 9,81$	m/s^2
$\dot{\vec{r}}(t)$	1. Zeitableitung des Ortes (Momentangeschw.)	m/s
$\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$	1. Zeitableitung der Ortskomponenten	m/s
$\ddot{\vec{r}}(t)$	2. Zeitableitung des Ortes (Momentanbeschl.)	m/s^2
$\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)$	2. Zeitableitung der Ortskomponenten	m/s^2
$\dot{\vec{v}}(t)$	1. Zeitableitung der Geschw. (Momentanbeschl.)	m/s^2
$\dot{v}_x(t), \dot{v}_y(t), \dot{v}_z(t)$	1. Zeitableitung der Geschwindigkeitskomponenten	m/s^2

$\vec{M}$	Drehmoment	Nm
$\lvert\vec{M}\rvert$	Betrag des Drehmoments	Nm
$\vec{T}(s), \vec{T}(t)$	Tangentenvektor mit Parameter s bzw. t	1
$\vec{N}(s), \vec{N}(t)$	Hauptnormalenvektor mit Parameter s bzw. t	1
$\vec{B}(s), \vec{B}(t)$	Binormalenvektor mit Parameter s bzw. t	1
$\kappa(s), \kappa(t)$	Krümmung der Raumkurve in der $\vec{T}$-$\vec{N}$-Ebene	1/m
$\tau(t)$	Torsion der Raumkurve aus der $\vec{T}$-$\vec{N}$-Ebene	1/m
$\vec{F}$	Kraft	N
$\lvert\vec{F}\rvert$	Betrag der Kraft	N
F_x, F_y, F_z	Komponenten der Kraft	N
$F_\perp, F_\parallel$	Senkrechte bzw. parallele Komponente der Kraft	N
$\Delta t_0, \Delta t_0'$	Eigenzeitintervall im Inertialsystem S bzw. S′	s
$\Delta t, \Delta t'$	Zeitintervall im Inertialsystem S bzw. S′	s
l_0, l_0'	Eigenlänge im Inertialsystem S bzw. S′	m
l, l'	Länge eines bewegt. Körp. im Inertialsyst. S bzw. S′	m
t_1, t_2, t_1', t_2'	Zeitpunkte im Inertialsystem S	s
x_1, x_1'	Orte im Inertialsystem S bzw. S′	m
γ	Lorentz-Faktor	1
β	Geschwindigkeitsparameter	1
u_x, u_y, u_z	Geschwindigkeit eines Körper im Inertialsystem S	m/s
u_x', u_y', u_z'	Geschwindigkeit eines Körper im Inertialsystem S′	m/s
$Z(t_i)$	Zustand zum Zeitpunkt t_i (alter Zustand)	-
$Z(t_i + \Delta t)$	Zustand nach dem Zeitintervall Δt (neuer Zustand)	-
$\Delta Z(\Delta t_i)$	Zustandsänderung im Zeitintervall Δt_i	-
$R(\Delta t_i)$	Änderungsrate im Zeitintervall Δt_i	-
W	Arbeit allgemein	J
W_B	Beschleunigungsarbeit	J
W_H	Hubarbeit	J
$\vec{F}(\vec{r})$	Kraft am Ort $\vec{r}$, Kraftfeld (Vektorfeld)	N
$V(\vec{r})$	Potential am Ort $\vec{r}$, Potentialfeld (Skalarfeld)	J
E_{kin}	Kinetische Energie	J
E_{pot}	Potentielle Energie	J

$\vec{\nabla}$	Nabla-Operator	-
grad $V(\vec{r})$	Gradient des Potentials $V(\vec{r})$, Vektor bzw. Vektorfeld	-
T	Kinetische Energie im Lagrange-Formalismus	J
p	Anzahl der holonomen Zwangsbedingungen	1
f	Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems	1
$q(t)$	Generalisierte Koordinate	-
$\dot{q}(t)$	Generalisierte Geschwindigkeit	-
$g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t)$	Gleichung für die Zwangsbedingungen	-
$L(q(t), \dot{q}(t), t)$	Lagrange-Funktion	J
$\dot{q}(t)$	Generalisierte Geschwindigkeit	-
ω_0	Winkelgeschwindigkeit (ungedämpfte Schwingungen)	rad/s
ω_D	Winkelgeschwindigkeit (gedämpfte Schwingungen)	rad/s
δ	Dämpfungskonstante (viskos gedämpfte Schwingungen)	1/s
T	Periodendauer	s
$\vec{F}_N$	Normalkraft	N
$\vec{F}_G$	Gewichtskraft	N
$\vec{F}_{G\perp}$	Senkrecht zur Unterlage zeigende Komponente von F_G	N
$F_{G\perp x}, F_{G\perp y}, F_{G\perp z}$	Komponente von $F_{G\perp}$	N
$\vec{F}_F$	Federkraft	N
F_{Fx}	x- Komponente der Federkraft	N
$\vec{F}_{\text{res}}$	Resultierende Kraft	N
$F_{\text{res } x}$	x- Komponente der resultierenden Kraft	N
D	Federkonstante	N/m
i	Komplexe Einheit	-
$\underline{Z}$	Komplexe Zahl	-
$\lvert\underline{Z}\rvert$	Betrag eines komplexen Zeigers	-
$\text{Re}\{\underline{Z}\}$	Realteil einer komplexen Zahl	-
$\text{Im}\{\underline{Z}\}$	Imaginärteil einer komplexen Zahl	-

Inhaltsverzeichnis

Teil 1 Grundlagen **1**

1 Bedeutung der Kinematik für die Mechanik **1**

2 Vektoren in der Physik **5**
2.1 Darstellung von Vektoren 5
2.1.1 Darstellung mit Spalten- und Zeilenvektoren 6
2.1.2 Darstellung mit Einheitsvektoren 7
2.2 Spezielle Vektoren 8
2.2.1 Ortsvektoren 8
2.2.2 Ortsverschiebungsvektoren 10
2.2.3 Axiale Vektoren 11
➠ Exkurs Lösung von 3×3-Determinanten 12
2.2.4 Kräfte 16
2.3 Drehwinkel 19

3 Translationsbewegungen **21**
3.1 Bewegungstypen 21
3.1.1 Typ A: Geradlinige Bewegung mit konstantem Tempo 22
3.1.2 Typ B: Geradlinige Bewegung mit Tempoänderung 22
3.1.3 Typ C: Nicht geradlinige Bewegung mit konstantem Tempo . . . 23
3.1.4 Typ D: Nicht geradlinige Bewegung mit Tempoänderung 24
3.2 Beschreibungsgrößen 24
3.2.1 Ort und Ortsfunktion 25
3.2.2 Ortsverschiebung und Weg 25
3.2.3 Durchschnittsgeschwindigkeit und Durchschnittstempo 29
3.2.4 Momentangeschwindigkeit und Momentantempo 32
➠ Exkurs Darstellung von Funktionen in Mathematik und Physik 33
3.2.5 Durchschnittsbeschleunigung 36
➠ Exkurs Die Einheit der Beschleunigung 49
3.2.6 Momentanbeschleunigung 50
➠ Exkurs Winkelmaße 56
➠ Exkurs Diagramme in der Kinematik 61
3.2.7 Begleitendes Dreibein 71
3.2.8 Klothoiden 82
3.3 Newtonsche Bewegungsgleichung 90

4 Relativistische Kinematik **95**
4.1 Historische Entwicklungen 95
4.2 Postulate der SRT 96
4.3 Galilei-Transformation 97

4.4	Relativität der Gleichzeitigkeit	98
4.5	Relativität der Zeit	101
4.6	Lorentz-Transformation	107
4.6.1	Herleitung über Korrekturfaktor	108
4.6.1.1	Herleitung des Korrekturfaktors k	108
4.6.1.2	Herleitung der Transformationsgleichung für t'	109
4.6.1.3	Herleitung der Transformationsgleichung für t	110
4.6.1.4	Transformationsgleichungen	110
4.6.2	Herleitung über Bezugssysteme	112
4.6.2.1	Herleitung der Transformationsgleichung für t'	112
4.6.2.2	Herleitung der Transformationsgleichung für t	113
4.7	Relativität der Länge	114
4.7.1	Herleitung der Längenkontraktion über die Lorentz-Transformation	114
4.7.2	Herleitung der Längenkontraktion über die Zeitdilatation	116
4.8	Addition von Geschwindigkeiten	123
4.8.1	Herleitung der Gleichung für u_x	123
4.8.2	Herleitung der Gleichungen für u_y und u_z	124
4.9	Raum-Zeit-Diagramme	126
4.9.1	Konstruktion von Minkowski-Diagrammen	127
4.9.2	Gleichortigkeit und Gleichzeitigkeit	132
4.9.3	Von Ort-Zeit- zu Minkowski-Diagrammen	134
5	**Systemdynamik**	**139**
5.1	Grundlagen der Systemdynamik	139
5.2	Der Begriff System	139
5.3	Größen und Numerik der Systemdynamik	139
5.4	Grundstruktur dynamischer Systeme	141
5.5	Ort-Zeit-Funktionsgleichung und Iterationsgleichung	146
6	**Lagrange-Formalismus**	**149**
6.1	Arbeit und Energie	149
6.1.1	Beschleunigungsarbeit und kinetische Energie	151
6.1.2	Schwerefeld	153
6.1.3	Hubarbeit und potentielle Energie	155
6.2	Kartesische Koordinaten	159
6.3	Freiheitsgrade	159
6.4	Zwangsbedingungen	160
6.5	Generalisierte Koordinaten	162
6.6	Lagrange-Funktion	163
6.7	Lagrange-Gleichung	164
7	**Schwingungen**	**173**
7.1	Federpendel	173

➠ Exkurs Galileisches Trägheitsprinzip . . . 176
7.2 Ungedämpfte Schwingungen . . . 177
➠ Exkurs Komplexe Zahlen . . . 184
7.3 Gedämpfte Schwingungen . . . 189
7.3.1 Abklingverhalten bei viskos gedämpften Oszillatoren . . . 196
7.3.1.1 Schwingungsfall . . . 196
7.3.1.2 Aperiodischer Grenzfall . . . 196
7.3.1.3 Kriechfall . . . 197

Teil 2 Anwendungen . . . 201

8 Aufgaben . . . 201
8.1 Der umkehrende Radfahrer . . . 201
8.2 Die sich begegnenden Radfahrer . . . 203
8.3 Der senkrecht nach oben geschossene Ball . . . 206
➠ Exkurs Linienintegrale . . . 211
➠ Exkurs Signum-Funktion . . . 217
8.4 Die negative Beschleunigung zweier Autos . . . 220
8.5 Die frei fallende Kugel mit Luftreibung . . . 227
➠ Exkurs Hyperbolicus- und Area-Funktionen . . . 232
8.6 Die in zäher Flüssigkeit frei fallende Kugel . . . 240
➠ Exkurs Newtonsches Näherungsverfahren . . . 247
8.7 Die sportlich gestoßene Kugel . . . 251
8.8 Die schnellen Teilchen aus der Atmosphäre . . . 265
➠ Exkurs Zerfallsgesetz . . . 265
8.9 Das schnelle Raumschiff und das Raumdock . . . 270
8.10 Die schiefe Ebene . . . 274
8.10.1 Die schiefe Ebene und der Lagrange-Formalismus . . . 274
8.10.2 Die schiefe Ebene und die Newtonschen Axiome . . . 278
➠ Exkurs Reaktionsprinzip . . . 279

Literaturverzeichnis . . . 285

Stichwortverzeichnis . . . 289

2 Vektoren in der Physik

Da Vektoren in der Physik eine wichtige Rolle spielen, sollen sie in diesem Skript an Beispielen gesondert vorgestellt werden. Allgemein werden die Vektoren den Tensoren zugeordnet. Unter einem Tensor versteht man ganz allgemein eine Größe, mit der man Skalare, Vektoren und weitere Größen analoger Struktur in einem einheitlichen Schema darstellen kann. In der nicht relativistischen Mechanik des dreidimensionalen euklidischen Raumes ($\mathbb{R}^3$) werden folgenden Tensoren benötigt:

- Tensoren 0. Stufe: Skalare mit einer Komponente ($3^0 = 1$)
- Tensoren 1. Stufe: Vektoren mit drei Komponenten $3^1 = 3$)
- Tensoren 2. Stufe: Matrizen mit neun Komponenten ($3^2 = 9$)

Ein Tensor 0. Stufe, also eine skalare Größe, ist bspw. die Umgebungstemperatur, die mit einer Maßzahl und einer Maßeinheit vollständig angegeben ist. Viele Größen in der Kinematik wie die Ortsverschiebung, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung werden durch Tensoren 1. Ordnung, meist in Form von Spaltenvektoren, beschrieben. Ein Beispiel für einen (antisymmetrischen) Tensor 2. Stufe wäre das Trägheitsmoment, das sich mit einer 3×3 - Matrix darstellen lässt. In der relativistischen Kinematik, in der Raum und Zeit miteinander verknüpft sind, werden dann sog. Vierervektoren mit drei Raum- und einer Zeitachse im Minkowski-Raum verwendet.

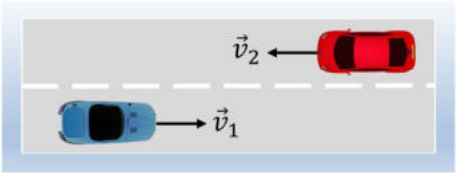


Abb. 2: Autos mit gleichem Tachowert

Um den Unterschied zwischen einer skalaren und einer vektoriellen Größe zu veranschaulichen, soll die Bewegung zweier Autos mit gleichem „Tachowert“ in Abb. 2 betrachtet werden. So ist es hier einerseits von Interesse wie *schnell* die Autos fahren und andererseits aber auch *wohin*. Das „wie schnell“, also das *Tempo*, zeigt der jeweilige Tachowert, dargestellt durch die Länge der entsprechenden Vektorpfeile, an. Die Länge der Vektorpfeile wird als Betrag des Vektors bezeichnet. Um das „wohin“ zu beschreiben, wird neben dem „Tachowert“ also noch eine Angabe für die Richtung benötigt. Und hier kommen die Vektoren ins Spiel, die in einer sehr übersichtlichen und einheitlichen Darstellung die notwendigen Angaben über den Betrag und die Richtung enthalten.

2.1 Darstellung von Vektoren

Vektoren werden in der physikalischen Fachliteratur, je nach Problemstellung und Autor, oft unterschiedlich dargestellt. Vektorielle Größen erkennt man üblicherweise an dem kleinen Pfeil über dem Formelzeichen. In manchen Büchern wird jedoch der Pfeil weggelassen, dafür erscheint dann das Formelzeichen in Fettdruck. In sehr alten Lehrwerken und Aufsätzen werden Vektoren auch mit Frakturbuchstaben dargestellt.

2.1.1 Darstellung mit Spalten- und Zeilenvektoren

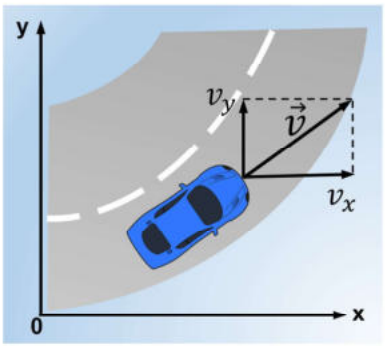


Abb. 3: Vektorkomponenten

Um nun auch die Richtung eines sich bewegenden Körpers anzugeben, wird ein Koordinatensystem benötigt. In der Physik wird üblicherweise der dreidimensionale euklidische Raum mit den Koordinaten x, y und z verwendet.
In Abb. 3 steht die z-Koordinate senkrecht auf der Straßen- bzw. Blattebene (Rechtssystem → Schraubenregel). Die Geschwindigkeit des Autos wird durch den Vektor $\vec{v}$ dargestellt. Dabei werden Vektoren in Gleichungen meistens in Spaltenschreibweise, und im Fließtext in Zeilenschreibweise dargestellt. In beiden Darstellungen werden seine drei Komponenten v_x, v_y und v_z angegeben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z), \quad |\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} \tag{1}$$

Der Betrag des Vektors wird mit Hilfe des Satzes von Pythagoras errechnet mit Betragsstrichen gekennzeichnet (→ Kap. 2.2.1, S. 8). Gl. (8), S. 9 zeigt den Zusammenhang von Spalten- und Zeilenvektoren etwas genauer. Obwohl sich das Auto hier nur in der x-y-Ebene bewegt, werden trotzdem alle drei Komponenten angegeben.

Beispiel 2.1 Das Auto aus dem Anfangsbeispiel in Abb. 3 soll sich mit 25 m/s in x-Richtung, mit 15 m/s in y-Richtung und sich in z-Richtung gar nicht bewegen. Mit den drei bekannten Komponenten kann die Geschwindigkeit in Spaltenschreibweise als sog. Spaltenvektor angegeben werden:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Wenn alle drei Komponenten die gleiche Einheit haben, dann kann man die Einheit aus dem Spaltenvektor herausziehen. Der Betrag errechnet sich dann mit Gl. (1):

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 29,15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Damit ergibt sich der Tachowert des Autofahrers mit $29{,}15 \cdot 3{,}6$ km/h zu 104,95 km/h. An dieser Stelle wird deutlich, dass Beträge von Vektoren, also auch Tachowerte, immer positive Werte annehmen.

2.1.2 Darstellung mit Einheitsvektoren

Die Komponenten von Vektoren sind ihrerseits auch wieder Vektoren. In der Praxis lässt man dann aber die Vektorpfeile über den Komponenten oft weg und schreibt z.B. v_x und nicht $\vec{v}_x$, was eigentlich nicht ganz richtig ist. Insbesondere in der Feldtheorie führt dieses Vorgehen jedoch häufig zu Problemen. Um mathematisch konsistent zu sein, verwendet man dann die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ bzw. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. In kartesischen Koordinatensystemen $\mathbb{R}^3$ werden sie meistens mit $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ bezeichnet. Für die x-Komponente $\vec{v}_x$ würde man dann $v_x \cdot \vec{e}_x$ schreiben. Grundsätzlich sind Einheitsvektoren dimensionslose Vektoren mit dem Betrag 1, die nur die reine Richtung angeben:

Einheitsvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Die Darstellung mit den Einheitsvektoren zeigt sehr anschaulich, dass Vektoren geometrisch addiert werden (Gl. (5)). Insbesondere in der Technischen Mechanik lassen sich bei statischen Problemen Kräfte mit entsprechendem Maßstab auch grafisch addieren und subtrahieren. Einheitsvektoren sind beim Rechnen oft sehr nützlich. Dabei gelten folgende Gleichungen:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \tag{3}$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0 \tag{4}$$

Somit lässt sich die Geschwindigkeit auch mit Einheitsvektoren darstellen:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y + v_z \cdot \vec{e}_z \tag{5}$$

Die Darstellung in Gl. (6) zeigt sehr anschaulich, dass sich die Geschwindigkeit aus einem Betrag $|\vec{v}|$ und einer Richtung $\vec{e}_v$ zusammensetzt:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{e}_v \qquad \vec{e}_v = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} \tag{6}$$

Dabei zeigt der Einheitsvektor $\vec{e}_v$ in Richtung der Geschwindigkeit $\vec{v}$.

Beispiel 2.2 Mit den Ergebnissen aus Beispiel 1 und Gl. (6) lässt sich die Geschwindigkeit nun so darstellen, dass Betrag $|\vec{v}|$ und Richtung $\vec{e}_v$ sofort erkennbar sind.

$$\vec{e}_v = \frac{1}{29,15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \rightarrow \vec{e}_v = \begin{pmatrix} 0,86 \\ 0,51 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v} = 29,15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \begin{pmatrix} 0,86 \\ 0,51 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zur Überprüfung des Ergebnisses kann jetzt der Betrag des Einheitsvektors in Richtung der Geschwindigkeit, der ja 1 sein muss, berechnet werden:

$$|\vec{e}_v| = \sqrt{(0,86)^2 + (0,51)^2 + (0)^2} = 1$$

Die Richtungsangabe $\vec{e}_v$ bezieht sich übrigens immer auf das zuvor gewählte Koordinatensystem. Eine Drehung des Koordinatensystems würde nur die Richtung $\vec{e}_v$, nicht aber den Betrag $|\vec{v}|$ (Tachowert) ändern.

2.2 Spezielle Vektoren

Bislang wurden Geschwindigkeitsvektoren von Autos betrachtet. Im mathematischen Sinne gehören diese Vektoren zu den freie Vektoren. Freie Vektoren gehören einer Pfeilklasse an, bzw. einer von ihnen repräsentiert eine solche.

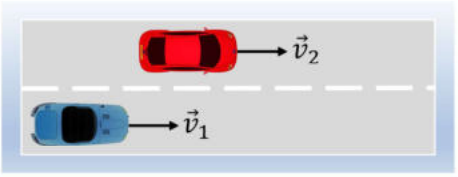


Abb. 4: Geschwindigkeitsvektor als Pfeilklasse

Die Abb. 4 zeigt zwei Autos, die beide mit gleichem Tachowert $|\vec{v}|$ in die gleiche Richtung $\vec{e}_v$ fahren. Daher haben beide Autos auch den gleichen Geschwindigkeitsvektor: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$. Es ist unmittelbar einsichtig, dass alle Autos, die sich mit gleichem Tachowert parallel und in gleiche Richtung zu den beiden Autos bewegen, auch den gleichen Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ haben. Am Rande bemerkt ist der „Tachowert“ keine „wirkliche“ physikalische Größe. Der Tachowert entspricht dem Momentantempo, das wiederum dem Betrag der Momentangeschwindigkeit entspricht. Veranschaulicht wird das Tempo bzw. der Betrag des Geschwindigkeitsvektors durch die Länge des entsprechenden Vektorpfeils.

2.2.1 Ortsvektoren

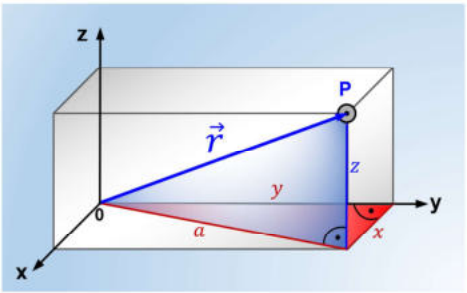


Abb. 5: Ortsvektor im $\mathbb{R}^3$

Im Gegensatz zu den freien Vektoren, die einer Pfeilklasse angehören, sind Ortsvektoren *gebundene* Vektoren, die keine Pfeilklassse repräsentieren. Alle Ortsvektoren haben jedoch zwei Gemeinsamkeiten: sie haben ihren Fußpunkt im Ursprung des Koordinatensystems und ihre Spitze zeigt auf einen Punkt P im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$.
In Abb. 5 zeigt der Ortsvektor $\vec{r}$ auf den Schwerpunkt eines Körpers, der sich im Punkt P befindet. In diesem Zusammenhang wird der Ursprung auch als Nullvektor

$\vec{0} = (0, 0, 0)$ bezeichnet. Punkte oder Positionen im Raum können also durch ihre Ortsvektoren repräsentiert werden:

Raumpunkt und Ortsvektor

$$\mathrm{P}(x/y/z) \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ (Spaltenvektor)}, \quad \vec{r} = (x, y, z) \text{ (Zeilenvektor)} \tag{7}$$

Hinweis: Ganz korrekt müsste der Zeilenvektor mit einem hochgestellten T (für transponiert) versehen werden: $\vec{r} = (x, y, z)^T$. Unter Transponieren versteht man in diesem Zusammenhang die Vertauschung aller Zeilen mit den entsprechenden Spalten. So entsteht durch Transponieren aus einem Spaltenvektor ein Zeilenvektor und umgekehrt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T := (x, y, z), \qquad (x, y, z)^T := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{8}$$

Da sich die drei Komponenten der Vektoren in $\mathbb{R}^3$ als einspaltige Matrizen darstellen lassen, wird das T meistens nicht mitgeschrieben. Sobald jedoch entsprechende Berechnungen mit Matrizen durchzuführen sind, muss das hochgestellte T unbedingt mitgeführt werden.

Der Betrag des Ortsvektors entspricht der Länge des Vektorpfeils und somit dem direkten Abstand des entsprechenden Raumpunktes vom Ursprung. Die Berechnung erfolgt durch zweimaliges Anwenden des Satzes von Pythagoras (→ Abb. 5, S. 8):

$$|\vec{r}|^2 = a^2 + z^2 \quad \text{mit } a^2 = x^2 + y^2 \qquad \rightarrow \qquad |\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Betrag des Ortsvektors

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{9}$$

In Kap. 3.2.1, S. 25 wird der Ortsvektor dann unter kinematischen Aspekten betrachtet und mit der Zeit t parametriert, was dann zur Ortsfunktion führt.

Beispiel 2.3 Der Punkt in Abb. 5, S. 8 soll folgende Koordinaten haben: $x = 3$ m, $y = 9$ m und $z = 5$ m. Gesucht ist der Ortsvektor sowie der Abstand des Punktes vom Ursprung.

Zuerst kann der Ortsvektor entsprechend Gl. (7) als Spaltenvektor angegeben werden:

$$\mathrm{P}(3/9/5)\ \mathrm{m} \qquad \rightarrow \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$

Der Abstand von P zum Ursprung lässt sich einfach mit Gl. (9), S. 9 berechnen:

$$|\vec{r}| = \sqrt{(3\text{ m})^2 + (9\text{ m})^2 + (5\text{ m})^2} = 10,72\text{ m}$$

2.2.2 Ortsverschiebungsvektoren

Der Ortsverschiebungsvektor $\Delta\vec{r}$, kurz Ortsverschiebung genannt, hat insbesondere in der Kinematik eine wichtige Bedeutung (→ Kap. 3.2.2, S. 25). So wird z.B. die Geschwindigkeit mit Hilfe der Ortsverschiebung definiert. Die Ortsverschiebung ist ein Vektor, der die beiden Orte $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ direkt miteinander verbindet (→ Abb. 6). Dabei zeigt der Ortsverschiebungsvektor vom Anfangspunkt P_1 zum Endpunkt P_2. Da sich der Ortsverschiebungsvektor formal aus der Subtraktion zweier Vektoren ergibt, wird er in der Mathematik auch als Differenzvektor bezeichnet.

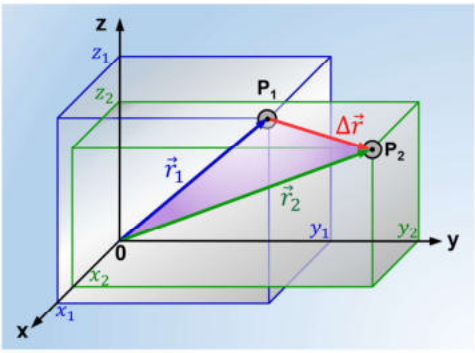


Abb. 6: Orts- und Verschiebungsvektoren im $\mathbb{R}^3$

Der Ortsverschiebungsvektor kann sehr einfach über einen geschlossenen Polygonzug berechnet werden: Bei einem geschlossenen Polygonzug werden die entsprechenden Vektoren geometrisch addiert. Dazu beginnt man am besten im Fußpunkt eines (beliebigen) Vektors und „wandert“ zu dessen Spitze. Dann erreicht man den Fußpunkt oder die Spitze des nächsten Vektors usw. Das geometrische Addieren ist dann beendet, wenn man wieder am Startpunkt angekommen ist, also der Polygonzug geschlossen ist. Wandert man vom Fußpunkt zur Spitze, erhält der entsprechende Vektor ein positives Vorzeichen. Muss man von der Spitze zum Fußpunkt wandern, erhält der Vektor ein negatives Vorzeichen. Dabei spielt es keine Rolle, ob im oder entgegen des Uhrzeigersinns gewandert wird. Auch der Startpunkt kann beliebig gewählt werden. Am Beispiel des Ortsverschiebungsvektors in Abb. 6 soll das Verfahren gezeigt werden:

$$+\vec{r}_1 + \Delta\vec{r} - \vec{r}_2 = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Somit ergibt sich der Ortsverschiebungsvektor allgemein mit Gl. (10):

Ortsverschiebungsvektor

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \tag{10}$$

Der Betrag des Ortsverschiebungsvektors ist der direkte Abstand zwischen beiden Punkten P_1 und P_2:

Betrag des Ortsverschiebungsvektors

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \tag{11}$$

Übrigens ist das hier gezeigte Verfahren des geschlossenen Polygonzugs mathematisch die einfache Subtraktion zweier Vektoren. Hier zeigt sich sehr schön, dass Vektoren addiert bzw. subtrahiert werden, indem man ihre Komponenten separat addiert bzw. subtrahiert.

Beispiel 2.4 Die beiden Punkte P_1 und P_2 in Abb. 6, S. 10 sollen durch folgende Ortsvektoren repräsentiert werden: $\vec{r}_1 = (5, 7, 8)$ m und $\vec{r}_2 = (4, 9, 6)$ m. Zur Berechnung der Ortsverschiebung werden die Ortsvektoren in Gl. (10), S. 10 eingesetzt:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \rightarrow \quad \Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ m} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m}$$

Die Komponenten des Ortsverschiebungsvektors lassen folgende Aussagen über die Bewegung des Körpers zu: So sieht man, dass sich der Körper im Zeitintervall Δt um 1 m entgegen der positiven x-Richtung, um 2 m in positive y-Richtung und um 2 m entgegen der positiven z-Richtung bewegt hat. Der direkte Abstand „Luftlinie“ zwischen P_1 und P_2 lässt sich mit Gl. (11) angeben:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(-1 \text{ m})^2 + (2 \text{ m})^2 + (-2 \text{ m})^2} = 3 \text{ m}$$

Wie der Betrag des Geschwindigkeitsvektors, kann der Betrag des Ortsverschiebungsvektors immer nur ein positiver Zahlenwert sein. Dies wird deutlich, wenn man sich klar macht, dass der Abstand $|\Delta\vec{r}|$ ja auch kein Vektor ist. Der direkte Abstand ist nicht mit dem tatsächlich von einem Körper zurückgelegten Weg auf seiner Bahnkurve gleichzusetzen. Denn wenn sich der Körper nicht direkt von P_1 nach P_2 bewegt, ist der zurückgelegte Weg natürlich größer als die „Luftlinie“.

2.2.3 Axiale Vektoren

Vektoren wie die Geschwindigkeit, die Ortsverschiebung und auch die Beschleunigung gehören zu den polaren Vektoren. Diese sind mit einer Maßzahl und einer Richtungsangabe vollständig beschrieben. Sollen aber z.B. Drehbewegungen beschrieben werden, benötigt man noch eine andere Art von Vektoren, die axialen Vektoren. Um axiale Vektoren vollständig zu beschreiben, wird neben der Maßzahl, der Richtungsangabe

zusätzlich noch der Drehsinn angegeben. Zur Veranschaulichung von axialen Vektoren soll die Abb. 7, S. 12 betrachtet werden. Hier bewegt sich ein kleiner Körper auf einer Kreisbahn in der x-y-Ebene. Die Drehachse ist hier die z-Achse. Mit insgesamt drei Vektoren kann diese Kreisbewegung beschrieben werde: Der Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_B$, dem Radiusvektor $\vec{r}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, die hier ein axialer Vektor ist.

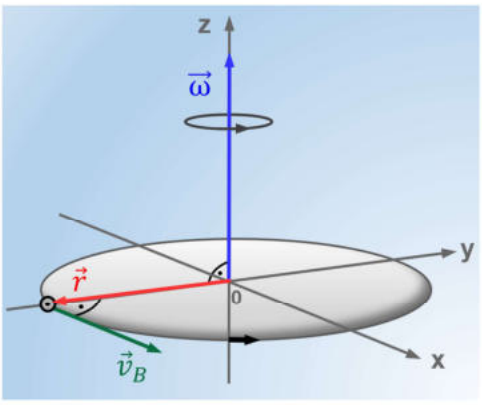


Abb. 7: Vektoren bei einer Drehbewegung

Die Pfeilspitze der Winkelgeschwindigkeit gibt bei axialen Vektoren den Drehsinn an, der wiederum durch die Rechte-Hand-Regel per Konvention festgelegt ist: Der Daumen der rechten Hand gibt den Drehsinn, also die Richtung des axialen Vektors, und die gekrümmten Finger die Drehrichtung um die Drehachse, an. Wenn die Drehachse durch den Koordinatenursprung verläuft, dann steht die Bahngeschwindigkeit senkrecht zum Radiusvektor und senkrecht zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit.

Mathematisch sind die drei Vektoren $\vec{v}_B$, $\vec{\omega}$ und $\vec{r}$ über das Vektorprodukt, auch Kreuzprodukt oder äußeres Produkt genannt, miteinander verknüpft:

Bahngeschwindigkeit

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} v_{B_x} \\ v_{B_y} \\ v_{B_z} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Das Vektorprodukt eines axialen Vektors (hier $\vec{\omega}$) und eines polaren Vektors (hier $\vec{r}$) ergibt einen polaren Vektor (hier $\vec{v}_B$). Vektorprodukte lassen sich formal als Determinante übersichtlich darstellen. Es handelt sich hier übrigens nicht um eine „echte“ Determinante im Sinne der linearen Algebra, da hier die Lösung mit $\vec{v}_B$ ein Vektor und kein Skalar ist.

➠ **Exkurs** Lösung von 3×3-Determinanten

Bei einer Determinanten handelt es sich um eine Zahl - also um ein Skalar - das man einer quadratischen $n \times n$-Matrix zuordnen kann. Mit Hilfe von Determinanten lassen sich bspw. lineare Gleichungssysteme (LGS) lösen. Wenn - wie hier - eine 3×3 - Determinante zu lösen ist, dann (und nur dann!) kann die Regel von Sarrus angewendet werden. Im nun folgenden Beispiel soll die Determinante der Matrix A gelöst werden. Dazu wird im ersten Schritt die Matrix A als Determinante dargestellt, erkennbar an

den beiden vertikalen Strichen links und rechts der Spalten. Nach der Regel von Sarrus werden nun im zweiten Schritt die ersten beiden Spalten nochmals rechts neben die Determinante angehängt.

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}\right|$$

Im dritten und letzten Schritt werden jeweils die drei Elemente der drei von links-oben nach rechts-unten zeigenden Diagonalen (durchgezogenen Pfeile) multipliziert und die Diagonalen addiert:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

Dann werden die drei Elemente der drei von links-unten nach rechts-oben zeigenden Diagonalen (gestrichelte Pfeile) multipliziert und die Diagonalen subtrahiert:

$$-a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

So ergibt sich die Determinante der Matrix A mit folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12} \end{aligned}$$

Beispiel 2.5 In diesem Beispiel soll die Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_B$ des Körpers aus Abb. 7, S. 12 mit konkreten Zahlenwerten berechnet werden. Da sich der Körper in der x-y-Ebene bewegt, entspricht der Radiusvektor exakt dem Ortsvektor. Nimmt man für den Radius $|\vec{r}| = 0,8$ m an, dann folgt daraus für den Ortsvektor: $\vec{r} = (0; -0,8; 0)$ m.

Hinweis: Wenn die Zahlenwerte (hier -0,8) nicht ganzzahlig sind, dann trennt man die Komponenten in der Zeilenschreibweise durch Semikolons und nicht durch Kommas.

Davon ausgehend, dass sich der Körper fünf mal pro Sekunde um seine Drehachse dreht, lässt sich mit $\omega = 2\pi f$ die Winkelgeschwindigkeit errechnen: $\omega = 2\pi 5\ s^{-1} = 31,42\ s^{-1}$. Da der Körper hier um die z-Achse rotiert, kann $\vec{\omega}$ auch keine Komponenten in x- und y-Richtung haben. Somit ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit: $\vec{\omega} = (0; 0; 31,42)\ s^{-1}$. Die Bahngeschwindigkeit kann nun leicht berechnet werden:

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 31,42 \end{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -0,8 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{m} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 31,42\ \frac{1}{\mathrm{s}} \\ 0 & -0,8\ \mathrm{m} & 0 \end{vmatrix}$$

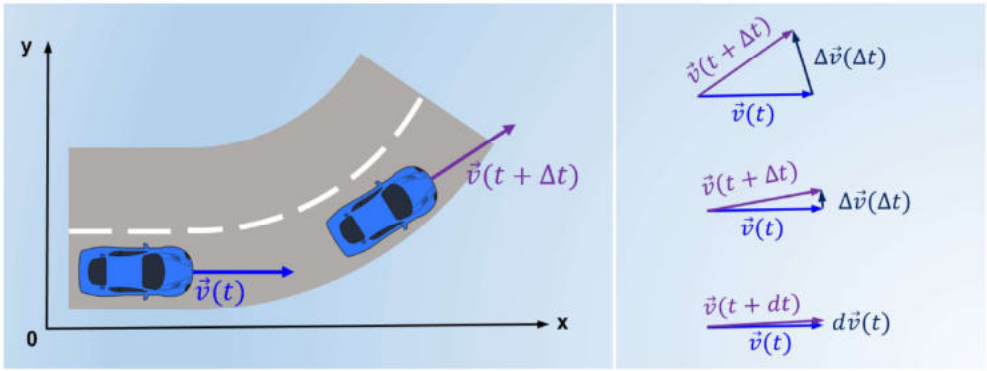


Abb. 36: Geschwindigkeitsänderung bei einer Kurvenfahrt mit konstantem Tempo

Das untere der drei Vektordiagramme soll den Grenzübergang $\Delta t \to 0$ symbolisieren, bei dem aus der Differenz $\Delta\vec{v}(\Delta t)$ das Differential $d\vec{v}(t)$ wird:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta\vec{v}(\Delta t)}{\Delta t}\right] = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} \tag{40}$$

Durch den Grenzübergang $\Delta t \to 0$ wird aus dem Differenzenquotient der Differentialquotient. So wie die Durchschnittsbeschleunigung als Differenzenquotient von $\Delta\vec{v}(\Delta t)$ und Δt für das Zeitintervall Δt definiert wurde (→ Gl. 33, S. 37), so wird die Momentanbeschleunigung als Differentialquotient $d\vec{v}(t)$ nach dt für den Zeitpunkt t definiert. Dieser Differentialquotient ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ nach der Zeit $\dot{\vec{v}}(t)$ bzw. die zweite Ableitung des Ortes $\vec{r}(t)$ nach der Zeit oder kurz die zweite Zeitableitung $\ddot{\vec{r}}(t)$. Da die infinitesimal kleine Geschwindigkeitsänderung $d\vec{v}(t)$ ein Vektor ist, werden die Differentialquotienten für jede der drei Komponenten einzeln gebildet: dv_x/dt, dv_y/dt und dv_z/dt. Dadurch erhält mit Gl. 40 die drei Komponenten der Momentanbeschleunigung. Nun kann die Momentanbeschleunigung allgemein definiert werden:

Momentanbeschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} \tag{41}$$

Wenn man die drei Vektordiagramme in Abb. 36 nun von oben nach unten vergleicht, fällt auf, dass sich mit kleiner werdendem Δt der Vektor der Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}(\Delta t)$ im Uhrzeigersinn immer weiter aufrichtet und zum Zeitpunkt $t + dt$ senkrecht zu $\vec{v}(t)$ steht. Das bedeutet, dass der Vektor der Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}(\Delta t)$ bzw. $d\vec{v}(t)$ keine Komponente in Richtung der Geschwindigkeit

$\vec{v}(t + dt)$ hat und sich somit auch die Länge des Geschwindigkeitsvektors - also das Tempo - nicht ändert.

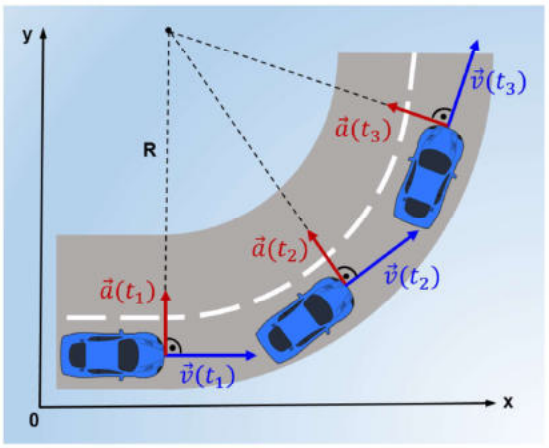


Abb. 37: Momentanbeschleunigung bei einer Kurvenfahrt mit konstantem Tempo

Da die Geschwindigkeitsänderung und die Beschleunigung nur über das Zeitintervall miteinander verknüpft sind ($d\vec{v}(t) = \vec{a}(t) \cdot dt$), zeigen sie natürlich in die gleiche Richtung. Die senkrecht zur Momentangeschwindigkeit stehende Beschleunigung $\vec{a}(t)$ führt nur zu einer Änderung der Richtung des Geschwindigkeitsvektors.
Die Abb. 37 zeigt die Momentangeschwindigkeit und die Momentanbeschleunigung zu verschiedenen Zeitpunkten. Dabei zeigen die Beschleunigungsvektoren immer zum Mittelpunkt des jeweiligen Krümmungskreises. Während der Kurvenfahrt auf einer Kreisbahn nimmt das Auto an einer Kreisbewegung teil, die sich auch mit den bei Kreisbewegungen üblichen Beschreibungsgrößen wie Winkel φ, Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_B$ beschreiben lassen.

Die Beschleunigung $\vec{a}$ wird dann als Radial- oder Zentripetalbeschleunigung bezeichnet. Die dafür benötigte Kraft wird entsprechend Zentripetalkraft genannt, die nicht mit der Zentrifugalkraft verwechselt werden darf.

Beispiel 3.11 Die folgende Abb. 38, S. 53 zeigt ein Auto, das eine kreisförmige Kurve mit einem konstanten Radius von $R = |\vec{r}_R(t)| = 30$ m durchfährt. Während der Kurvenfahrt bleibt das Tempo des Autos mit 12 m/s (43,2 km/h) konstant. Die Kurvenfahrt, also der Übergang vom geraden in den gekrümmten Teil der Straße, beginnt zum Zeitpunkt t_0 und endet zum Zeitpunkt t_2, bei dem die Straße vom gekrümmten Teil wieder in den geraden Teil übergeht. Da das Auto ein ausgedehnter starrer Körper ist, muss ein Punkt den jeweiligen Ort des Autos repräsentieren, hier die Mitte der vorderen Stoßstange.

Gesucht sind die Gleichungen der Vektoren $\vec{r}(t)$, $\vec{r}_R(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$, der Ort, die Momentangeschwindigkeit, die Momentanbeschleunigung, der zurückgelegte Weg zum Zeitpunkt $t_1 = 1,8$ s sowie der Zeitpunkt t_2, zu dem das Auto die Kurve wieder verlässt. Zusätzlich soll gezeigt werden, dass die Beschleunigung nur die Richtung, nicht aber das Tempo der Geschwindigkeit ändert.

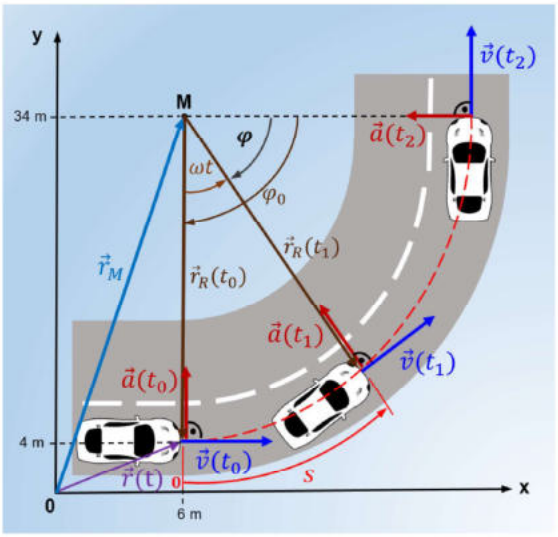


Abb. 38: Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung bei einer Kurvenfahrt mit konstantem Tempo

Da das Auto während der Kurvenfahrt an einer Kreisbewegung teilnimmt, werden hier auch die für Kreisbewegungen typischen Beschreibungsgrößen wie Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit verwendet (→ Kap. 2.2.3, S. 11).
Da sich das Koordinatensystem nicht im Kreismittelpunkt M befindet, wurden zusätzlich die Vektoren $\vec{r}_M$ und $\vec{r}_R(t)$ eingeführt. Dabei liegt der Kreismittelpunkt bei $\vec{r}_M = (6, 34, 0)$ m. So gibt der Vektor $\vec{r}_R(t)$ die auf den Kreismittelpunkt M bezogenen Ortskoordinaten des Autos zum Zeitpunkt t an und der Vektor $\vec{r}(t)$ ist dann der „wirkliche“ Ortsvektor, der sich auf das Koordinatensystem bezieht.

Bevor nun der Ortsvektor $\vec{r}_R(t)$ für die Kurvenfahrt des Autos entwickelt wird, soll zunächst Abb. 39 betrachtet werden. Mit den trigonometrischen Funktionen ergibt sich der Ortsvektor $\vec{r}_R(t)$. Mit $R = |\vec{r}_R|$ folgt dann (→ Gl. (56), S. 57):

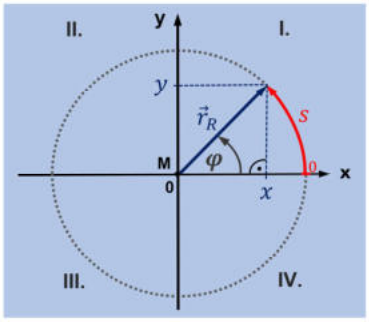


Abb. 39: Ortsvektor am Kreis

$$\left.\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{x}{|\vec{r}_R|} \quad \rightarrow \quad x = |\vec{r}_R| \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) &= \frac{y}{|\vec{r}_R|} \quad \rightarrow \quad y = |\vec{r}_R| \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow$$

$$\vec{r}_R(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi(t)) \\ R \cdot \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

Jetzt muss der sich zeitlich ändernde Winkel $\varphi(t)$ durch die konstante Winkelgeschwindigkeit ω ausgedrückt werden:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t \quad \text{mit} \quad \Delta t = t \quad \text{und} \quad \Delta\varphi = \varphi \quad \rightarrow \quad \varphi(t) = \omega t$$

Da sich das Auto während der Kurvenfahrt in einer Kreisbewegung befindet, muss jetzt die konstante Winkelgeschwindigkeit ω bzw. $|\vec{\omega}(t)|$ errechnet werden. Die Winkelgeschwindigkeit ist ein axialer Vektor, der hier senkrecht auf der Blattebene steht und

nach oben zeigt (→ Kap. 2.2.3, S. 11). Da hier die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ und der Vektor $\vec{r}_R(t)$ senkrecht zueinander stehen (→ Abb. 38, S. 53), ist $\alpha = \sphericalangle(\vec{w}, \vec{r}) = 90°$ und somit ist $\sin(90°) = 1$. Aber auch $\vec{v}(t)$ und $\vec{r}(t)$ stehen zu jedem Zeitpunkt senkrecht zueinander. Da die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ immer tangential zur Bahn steht, wird sie in diesem Zusammenhang auch als Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_B(t)$ bezeichnet. Weil das Auto nur während der Kurvenfahrt an einer Kreisbewegung teilnimmt, also nicht wirklich rotiert, wird hier die Geschwindigkeit weiter nur mit $\vec{v}(t)$ bezeichnet. Winkelgeschwindigkeit, Ortsvektor und (Bahn-)Geschwindigkeit sind über das Vektorprodukt miteinander verknüpft:

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{43}$$

$$\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \quad \rightarrow \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin(\alpha)| \quad \rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) \tag{44}$$

$$\text{Orthogonalität: } \vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \rightarrow \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90° \leftrightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \tag{45}$$

Nun kann die Winkelgeschwindigkeit über das Vektorprodukt berechnet werden:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \rightarrow |\vec{v}(t)| = |\vec{\omega}(t)| \cdot |\vec{r}(t)| \cdot \sin(\alpha) \quad \text{mit} \quad \sin(90°) = 1 \rightarrow$$
$$|\vec{\omega}(t)| = \frac{|\vec{v}(t)|}{|\vec{r}(t)|} = \frac{|\vec{v}(t)|}{|\vec{r}_R(t)|} = \frac{12 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{30 \ \text{m}} = 0,4 \ \frac{1}{\text{s}} \tag{46}$$

Das Auto in diesem Beispiel (Abb. 38, S. 53) fährt zum Zeitpunkt t_0 von einem geraden Abschnitt in eine Linkskurve ein, die sich im IV. Quadranten befindet. Dort beginnt dann die Bogenlänge s, also der Weg auf dem Kreisbogen, beginnend mit $s(t_0) = 0$ zuzunehmen. Da die Ortsfunktion auf trigonometrischen Funktionen basiert, ist der Winkel $\varphi(t)$ von großer Bedeutung. Man kann sich den Ortsvektor $\vec{r}_R$ als einen (hier) mit $|\vec{\omega}| = \omega = 0,4$ rad/s rotierenden Zeiger vorstellen. Natürlich gilt die Rotation hier nur für den Viertelkreis der Kurve.

In Abb. 39, S. 53 startet der Zeiger zum Zeitpunkt t_0 bei $\varphi(t_0) = 0$ und der Ortsvektor liegt auf der x-Achse und zeigt nach rechts: $\vec{r}_R(t_0) = (|\vec{r}|, 0, 0)$. Bei der Kurvenfahrt in diesem Beispiel liegt der Ortsvektor $\vec{r}_R(t)$ bei der Einfahrt in die Kurve jedoch auf der y-Achse und zeigt nach unten: $\vec{r}_R(t_0) = (0, -|\vec{r}_R|, 0)$ (→ Abb. 38, S. 53). Dadurch ist der Winkel zum Zeitpunkt t_0 nicht mehr Null, sondern $\varphi(t_0) = -\pi/2$.
In der Wechselstromtechnik und der Schwingungslehre wird der Winkel $\varphi(t)$ als Phasenwinkel und $\varphi(t_0)$ als Phasenverschiebungswinkel oder Nullphasenwinkel φ_0 bezeichnet. Dabei führt $\varphi_0 \neq 0$ stets zu einer Verschiebung der Sinus- bzw. Kosinus-Kurve bezüglich der Abszisse (hier t-Achse).

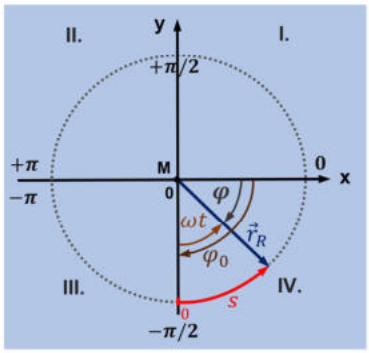


Abb. 40: Nullphasenwinkel

Liegen Zeiger bzw. Ortsvektoren zum Zeitpunkt t_0 im I. oder II. Quadranten, so werden die jeweiligen Nullphasenwinkel positiv gezählt (→ Abb. 40, S. 55). Sie können Werte im Bereich von $0 < \varphi_0 < \pi$ annehmen. Positive Nullphasenwinkel bewirken eine Verschiebung der Sinus- und Kosinus-Kurven nach links, wodurch alle Funktionswerte entsprechend *früher* erreicht werden. Die Begriffe *früher* und *später* beziehen sich hier auf die entsprechenden Funktionen ohne Nullphasenwinkel bzw. mit $\varphi_0 = 0$. Wenn nun Zeiger bzw. Ortsvektoren zum Zeitpunkt t_0 im III. oder IV. Quadranten liegen, werden die entsprechenden Nullphasenwinkel negativ gezählt. Sie können dann Werte im Bereich von $-\pi < \varphi_0 < 0$ annehmen und verschieben dabei die Sinus- und Kosinus-Kurven nach rechts. Dadurch werden dann alle Funktionswerte entsprechend *später* erreicht. Die genau auf den Achsen liegenden Winkel $\pi/2, \pi, -\pi$ und $-\pi/2$, werden allgemein keinem Quadranten zugeordnet. Somit setzt sich der Winkel $\varphi(t)$ für die Kurvenfahrt des Autos aus der zeitlichen Winkeländerung ωt und dem Nullphasenwinkel φ_0 zusammen:

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0 \quad \rightarrow \quad \varphi(t) = 0,4\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{2} \tag{47}$$

Jetzt kann die Ortsfunktion $\vec{r}_R(t)$ für die Kurvenfahrt aufgestellt werden, wobei der Fußpunkt von $\vec{r}_R(t)$ im Kreismittelpunkt M liegt:

$$\vec{r}_R(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos\left(|\vec{\omega}| \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ R \cdot \sin\left(|\vec{\omega}| \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30\ \text{m} \cdot \cos\left(0,4\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ 30\ \text{m} \cdot \sin\left(0,4\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

Die Anpassung an das Koordinatensystem mit dem Ursprung links unten erfolgt über einen geschlossenen Polygonzug (→ Kap. 2.2.2, S. 10):

$$\vec{r}_M + \vec{r}_R(t) - \vec{r}(t) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_M + \vec{r}_R(t) \tag{49}$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte ergibt sich nun auch die Ort-Zeit-Funktionsgleichung, kurz die Ortsfunktion des Autos für die Kurvenfahrt:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} 6\ \text{m} \\ 34\ \text{m} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30\ \text{m} \cdot \cos\left(0,4\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ 30\ \text{m} \cdot \sin\left(0,4\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6\ \text{m} + 30\ \text{m} \cdot \cos\left(0,4\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ 34\ \text{m} + 30\ \text{m} \cdot \sin\left(0,4\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{50}$$

7 Schwingungen

Bewegungen bei denen Körper periodisch zwischen zwei Orten hin und her pendeln, lassen sich ganz allgemein als Schwingungen bezeichnen. Charakteristisch für Schwingungen ist u.a., dass der schwingende Körper an den beiden zuletzt erreichten Orten zur Ruhe kommt und dann seine Bewegungsrichtung umkehrt. Somit sind Schwingungen auch immer Bewegungen mit *nicht* konstanter Beschleunigung. Das in Abb. 105, S. 170 behandelte ebene Pendel führt genau so eine Bewegung aus. Die dem ebenen Pendel zugrunde liegende DGL (251), S. 168 wurde im Rahmen des Lagrange-Formalismuses bereits entwickelt und die kinematischen Bewegungsgleichungen hergeleitet. Da Schwingungen nicht nur in der Physik von großer Bedeutung sind, sollen sie in diesem Kapitel etwas genauer betrachtet werden.

7.1 Federpendel

Unter einem Federpendel versteht man allgemein ein aus einer Feder mit einer angehängten Masse bestehendes schwingfähiges System. Dabei liegt einem Federpendel stets das lineare Federkraft-Gesetz zugrunde, wie dies die Abb. 107 veranschaulicht.

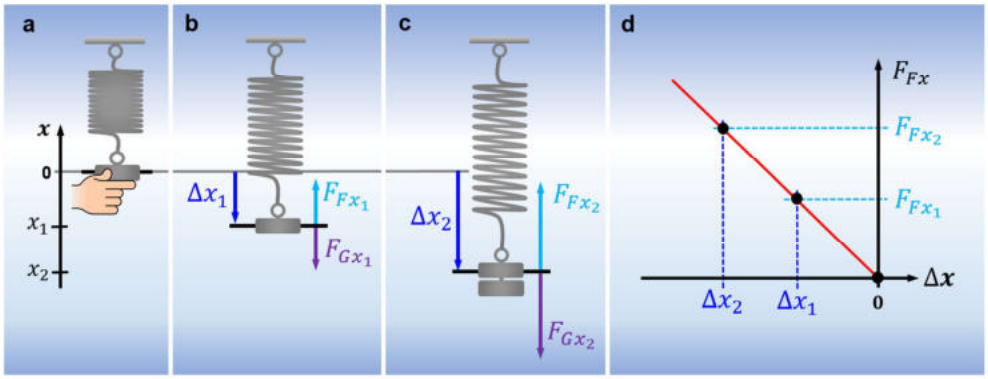


Abb. 107: Zusammenhang von Auslenkung Δx und Federkraft F_{F_x} bei einer Zugfeder

Zunächst wird in Abb. 107a ein Massenstück an die Feder gehängt und festgehalten. Dabei ist die Feder *nicht* ausgelenkt. Nun wird das Massenstück ganz vorsichtig losgelassen. Wenn das System zur Ruhe gekommen ist, wie in Abb. 107b, dann ist die Feder um Δx_1 nach unten ausgelenkt und die Federkraft $F_{F_{x_1}}$ zeigt nach oben. Die Abb. 107c zeigt das zur Ruhe gekommene Feder-Masse-System nachdem ein weiteres gleichgroßes Massenstück angehängt wurde. Nun hat sich die Auslenkung auf Δx_2 verdoppelt, wodurch sich auch die Federkraft auf nun $F_{F_{x_2}}$ verdoppelt hat.
Hätte man eine entsprechende Messreihe aufgenommen, dann würden die Messwerte durch eine Ursprungsgerade, wie in Abb. 107d repräsentiert werden. Man sieht, dass

die Federkraft F_{F_x} proportional zur Auslenkung Δx ist: $|F_{F_x}| \sim |\Delta x|$. Die Proportionalitätskonstante wird als *Federkonstante* D bezeichnet:

$$|F_{F_x}| \sim |\Delta x| \quad \rightarrow \quad |F_{F_x}| = D \cdot |\Delta x| \quad \rightarrow \quad D = \frac{|F_{F_x}|}{|\Delta x|}$$

Natürlich entspricht die Federkonstante auch dem Betrag der Steigung der Geraden in Abb. 107d, S. 173. Da die Gerade durch den Koordinatenursprung verläuft, kann das D direkt mit nur einem Wertepaar ermittelt werden.

Federkonstante

$$D = \left| \frac{F_{F_x}}{\Delta x} \right| \tag{260}$$

Anmerkung zur Benennung der Kräfte in Abb. 107, S. 173: Da die Kräfte hier nur in x-Richtung wirken und somit $\vec{F}_G = (F_{G_x}, 0, 0)$ und $\vec{F}_F = (F_{F_x}, 0, 0)$ ist, wurden aus didaktischen Gründen gleich die wirksamen Komponenten der Kräfte angegeben. Vielleicht stellt sich in diesem Zusammenhang auch noch die Frage, warum zur Definition der Federkonstanten nicht einfach x, sondern Δx verwendet wird, obwohl es doch von den Zahlenwerten her keinen Unterschied machen würde. Da die Gerade in Abb. 107d, S. 173 durch den Ursprung verläuft, ist in diesem Fall natürlich mathematisch $\Delta x_1 = x_1$ und $\Delta x_2 = x_2$. Aber mit x werden Orte und mit Δx Ortsverschiebungen oder wie hier Auslenkungen bezeichnet. Die Bedeutsamkeit des Unterschiedes zeigt die folgende Abb. 108b, S. 175 sehr schön. Denn durch die Vorspannung der Feder ist die Federkraft beim Nulldurchgang ($x = 0$) eben nicht Null. Trägt man die Federkraft über den Ort x auf, ergibt sich zwar eine Gerade, die aber um $|\vec{F}_G|$ nach oben verschoben ist (→ Abb. 110, S. 181).

Beispiel 7.1 Eine Feder wurde durch ein Massenstück um $\Delta x = -4$ cm ausgelenkt, was eine Federkraft von $F_{F_x} = 0,96$ N hervorrief. Gesucht ist die Federkonstante D.

Mit Gl. (260) lässt sich die Federkonstante direkt berechnen:

$$D = \left| \frac{F_{F_x}}{\Delta x} \right| = \left| \frac{0,96 \text{ N}}{-0,04 \text{ m}} \right| = 24 \ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Der in Abb. 107d, S. 173 gezeigte lineare Zusammenhang von Δx und F_{F_x} gilt nur für den elastischen Bereich und wird Hookesches Gesetz genannt:

Hookesches Gesetz

$$F_{F_x} = -D \cdot \Delta x \tag{261}$$

Das bislang als ruhend betrachtete Feder-Masse-System soll nun zum Schwingen angeregt werden. Mit Hilfe der folgenden Abb. 108 wird die Differentialgleichung (DGL) für das Federpendel schrittweise entwickelt, indem die notwendigen Kräftegleichungen mittels Polygonzug (→ Kap. 2.2.2, S. 10) aufgestellt werden.

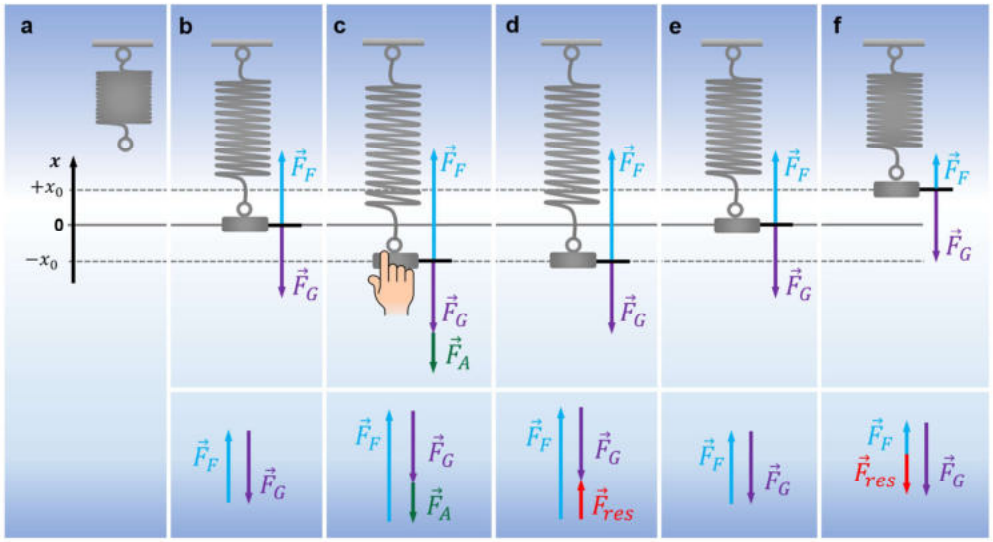


Abb. 108: Kräfte am ungedämpften Federpendel

Die Abb. 108a zeigt die unbelastete Feder. Durch Anhängen eines Massenstückes, wie in Abb. 108b zu sehen, wird die Feder vorgespannt und befindet sich nun am Ort $x = 0$. Da $\vec{F}_F$ und $\vec{F}_G$ gleichgroß, aber entgegen gerichtet sind, wirkt *keine* resultierende Kraft auf das Massenstück. Mit $\vec{F}_{\text{res}} = 0$ wird das Massenstück auch nicht beschleunigt:

$$\vec{F}_F(x=0) = -\vec{F}_G = -\begin{pmatrix} -m\cdot g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\cdot g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{262}$$

Das Federpendel wird in Abb. 108c nach unten ausgelenkt und festgehalten. Durch die von der Hand aufgebrachte Kraft $\vec{F}_A = (-D\cdot x_0, 0, 0)$, die jedoch kleiner als $\vec{F}_G$ ist, erhält die Feder ihre größte Auslenkung und das Massenstück befindet sich jetzt am tiefsten Punkt bei $x = -x_0$. Solange die Feder noch festgehalten wird, ist die Federkraft maximal und die resultierende Kraft null. Das Massenstück wird (noch) nicht beschleunigt. So lässt sich für die Federkraft am *unteren* Umkehrpunkt mit $\vec{F}_{F\max}(-x_0) = -\vec{F}_G - \vec{F}_A$ folgende Gleichung angeben:

$$\vec{F}_{F\max}(-x_0) = -\begin{pmatrix} -m\cdot g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -D\cdot x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\cdot g + D\cdot x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{263}$$

Die Abb. 108d, S. 175 zeigt das Federpendel nachdem es von der Hand freigegeben wurde. Da jetzt die durch die Hand aufgebrachte Kraft $\vec{F}_A$ weg fällt, wird das Massenstück mit $\vec{F}_{\text{res max}} = -\vec{F}_A$ von der Feder nach oben beschleunigt. Die resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ ist die Federkraft $\vec{F}_F$ abzüglich der Gewichtskraft $\vec{F}_G$. Durch die maximale Auslenkung des Pendels nach unten ($x = -x_0$), ergibt sich auch die maximale Federkraft $\vec{F}_{F\text{max}}$ und somit wird das Massenstück mit $\vec{F}_{\text{res max}}$ auch maximal nach oben beschleunigt:

$$\vec{F}_{\text{res max}}(-x_0) = -\vec{F}_A = -\begin{pmatrix} -D \cdot x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \cdot x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{264}$$

Dass die Feder schon vorgespannt war (→ Abb. 108b, S. 175), beeinflusst die Beschleunigung also nicht. Während das Massenstück nun nach oben beschleunigt wird, nimmt die resultierende Kraft entsprechend des Hookeschen Gesetzes immer weiter ab, die Geschwindigkeit jedoch immer weiter zu.

In Abb. 108e, S. 175 erreicht das Massenstück den Nulldurchgang ($x = 0$). Hier ist die maximale Geschwindigkeit erreicht, denn die resultierende Kraft ist null und damit ist auch die Beschleunigung null. Im Gegensatz zum Start der Bewegung (→ Abb. 108b, S. 175) bewegt sich das Massenstück jetzt infolge der Trägheit mit maximaler Geschwindigkeit über $x = 0$ hinaus weiter nach oben. Auch hier gilt die Gl. (262), S. (262). Beide Situationen lassen sich mit dem Galileischen Trägheitsprinzip erklären.

➠ **Exkurs** Galileisches Trägheitsprinzip (1. Newtonsches Axiom)

Wirkt auf einen Körper keine äußere resultierende Kraft, dann wird er auch nicht beschleunigt und seine Geschwindigkeit bleibt konstant.

Galileisches Trägheitsprinzip (1. Newtonsches Axiom)

$$\vec{F}_{\text{res}} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{a} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \text{const.} \tag{265}$$

Damit ergeben sich nun zwei Fälle. Im ersten Fall ist und bleibt der Körper in Ruhe und seine Geschwindigkeit ist null. Im zweiten Fall bewegt er sich mit konstanter Geschwindigkeit ungleich null. Im zweiten Fall liegt dann eine gleichförmige Bewegung vor (→ Kap. 3.1.1, S. 22).

Auf dem Weg nach oben wird das Massenstück direkt nach Überschreiten des Nulldurchgangs ($0 < x < x_0$) abgebremst, denn ab hier ist die Gewichtskraft größer als die Federkraft, wodurch die resultierende Kraft nun nach unten zeigt. In Abb. 108f, S. 175 ist dann der obere Umkehrpunkt ($x = x_0$) erreicht und das Massenstück ist

$$\vec{F}_{\text{res}}(t) = \begin{pmatrix} -D \cdot x(t) - \beta \cdot \dot{x}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad F_{\text{res } x}(t) = -D \cdot x(t) - \beta \cdot \dot{x}(t)$$

Für die beschleunigende Kraft kann jetzt entsprechend der Newtonschen Bewegungsgleichung (→ Gl. (149), S. 92) $F_{\text{res } x}(t) = m \cdot a_x(t)$ eingesetzt werden:

$$m \cdot a_x(t) = -D \cdot x(t) - \beta \cdot \dot{x}(t)$$

Da die Beschleunigung $a_x(t)$ die 2. Zeitableitung von $x(t)$ ist, wird $a_x(t) = \ddot{x}(t)$:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -D \cdot x(t) - \beta \cdot \dot{x}(t)$$

Mit Gleichung Gl. (296) liegt nun die DGL des gedämpften Federpendels vor. Da die Dämpfung durch eine Flüssigkeit hervorgerufen wird, spricht man auch von einer viskosen Dämpfung:

DGL eines viskos gedämpften Federpendels (Gedämpfter Oszillator)

$$\ddot{x}(t) + \frac{\beta}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0 \tag{296}$$

Es handelt sich hier um eine homogene lineare gewöhnliche DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Da an dieser Stelle nicht sofort ersichtlich ist, wie die Dämpfungsfunktion genau aussieht, ist das gezielte Raten schwierig. Also wird versucht, die DGL mit dem Exponentialansatz (→ Gl. (368), S. 243) zu lösen. Dazu werden zunächst die beiden Zeitableitungen $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$ gebildet:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot e^{\lambda \cdot t} \\ \dot{x}(t) &= A \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \lambda \\ \ddot{x}(t) &= A \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \lambda^2 \end{aligned} \tag{297}$$

Nun werden die Gleichungen für $x(t)$, $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$ in die DGL eingesetzt:

$$\begin{aligned} \cancel{A \cdot e^{\lambda \cdot t}} \cdot \lambda^2 + \frac{\beta}{m} \cdot \cancel{A \cdot e^{\lambda \cdot t}} \cdot \lambda + \frac{D}{m} \cdot \cancel{A \cdot e^{\lambda \cdot t}} &= 0 \\ \lambda^2 + \frac{\beta}{m} \cdot \lambda + \frac{D}{m} &= 0 \end{aligned} \tag{298}$$

Die Gl. 298 wird als charakteristische Gleichung bezeichnet (→ Gl. (281), S. 183), die nun mit Hilfe der quadratischen Ergänzung gelöst wird:

$$\lambda^2 + \frac{\beta}{m} \cdot \lambda + \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 = -\frac{D}{m} + \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2$$

$$\left(\lambda + \frac{\beta}{2m}\right)^2 = -\frac{D}{m} + \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{-\frac{D}{m} + \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}$$

Durch Einsetzen von Zahlenwerten, zeigt sich, dass die Diskriminante (Ausdruck unter der Wurzel) negativ ist. Also ergibt sich für λ wieder eine komplexe Lösung:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1/2} &= -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{-1 \cdot \left(\frac{D}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2\right)} \\
&= -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} \\
&= -\underbrace{\frac{\beta}{2m}}_{\delta} \pm \mathrm{i} \cdot \sqrt{\underbrace{\frac{D}{m}}_{{\omega_0}^2} - \underbrace{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}_{\delta^2}}
\end{aligned} \tag{299}$$

Mit δ wird die Dämpfungs- oder Abklingkonstante bezeichnet und das Verhältnis von Federkonstante führt zur Winkelgeschwindigkeit bzw. Kreisfrequenz des ungedämpften Oszillators (→ Gl. (269), S. 178):

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \mathrm{i} \cdot \sqrt{\underbrace{{\omega_0}^2 - \delta^2}_{{\omega_D}^2}} \tag{300}$$

Der Term unter der Wurzel setzt sich aus der Winkelgeschwindigkeit des ungedämpften Oszillators ω_0 und der Dämpfungskonstanten δ zusammen und ist die Winkelgeschwindigkeit des gedämpften Oszillators ω_D:

Winkelgeschwindigkeit eines gedämpften Oszillators

$$\omega_D = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} \tag{301}$$

Somit ergibt sich die Lösung für λ, die in den Ansatz einzusetzen ist:

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \mathrm{i} \cdot \omega_D \tag{302}$$

Nun wird λ in den Ansatz eingesetzt und man erhält die komplexe Lösung der DGL:

$$x(t) = A \cdot e^{(-\delta \pm \mathrm{i} \cdot \omega_D) \cdot t} \quad \rightarrow \quad x(t) = A \cdot e^{(-\delta + \mathrm{i} \cdot \omega_D) \cdot t} + B \cdot e^{(-\delta - \mathrm{i} \cdot \omega_D) \cdot t} \tag{303}$$

Die reale Lösung ergibt sich durch Einsetzen der Eulerschen Gleichung Gl. (290), S. 186 in die komplexe Lösung:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A \cdot e^{(-\delta+\mathrm{i}\cdot\omega_D)\cdot t} + B \cdot e^{(-\delta-\mathrm{i}\cdot\omega_D)\cdot t} \\
x(t) &= A \cdot e^{-\delta\cdot t+\mathrm{i}\cdot\omega_D\cdot t} + B \cdot e^{-\delta\cdot t-\mathrm{i}\cdot\omega_D\cdot t} \\
x(t) &= A \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \underbrace{e^{\mathrm{i}\cdot\omega_D\cdot t}}_{\text{Gl. (290), S. 186}} + B \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \underbrace{e^{-\mathrm{i}\cdot\omega_D\cdot t}}_{\text{Gl. (290), S. 186}} \\
x(t) &= A \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot [\cos(\omega_D \cdot t) + \mathrm{i} \cdot \sin(\omega_D \cdot t)] \\
&\quad + B \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot [\cos(\omega_D \cdot t) - \mathrm{i} \cdot \sin(\omega_D \cdot t)] \\
x(t) &= A \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + A \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \\
&\quad + B \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) - B \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \\
x(t) &= \underbrace{(A+B)}_{C_1} \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + \mathrm{i} \cdot \underbrace{(A-B)}_{C_2} \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \\
x(t) &= \underbrace{C_1 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t)}_{\text{Realteil}} + \underbrace{\mathrm{i} \cdot C_2 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \sin(\omega_D \cdot t)}_{\text{Imaginärteil}} \qquad (304)
\end{aligned}
$$

Mit der Gl. (304) liegt nun die allgemeine Lösung der DGL des gedämpften Federpendels als Linearkombination vor. Dabei sind Realteil und Imaginärteil jeweils spezielle Lösungen. C_1 und C_2 sind (noch) unbestimmte, aber frei wählbare Konstanten.

Setzt man in Gl. (304) für $C_1 = -x_0$ ein, dann beschreibt der Realteil die Bewegung des Massenstückes des viskos gedämpften Federpendels im Schwingungsfall:

$$x(t) = -x_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot e^{-\delta\cdot t} \qquad (305)$$

Nun wird überprüft, ob die mit Gl. (305) gefundene Lösung die DGL (296), S. 190 auch wirklich erfüllt. Dazu wird mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel zunächst die erste Zeitableitung $\dot{x}(t)$ gebildet:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -x_0 \cdot (-\sin(\omega_D \cdot t)) \cdot \omega_D \cdot e^{-\delta\cdot t} - x_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot (-\delta) \\
&= x_0 \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D \cdot e^{-\delta\cdot t} + x_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \delta \\
\dot{x}(t) &= x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot [\sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D + \cos(\omega_D \cdot t) \cdot \delta] \qquad (306)
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Produkt-, Summen- und Kettenregel kann jetzt die zweite Zeitableitung $\ddot{x}(t)$ gebildet werden:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot (-\delta) \cdot [\sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D + \cos(\omega_D \cdot t) \cdot \delta] \\
&\quad + x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \left[\cos(\omega_D \cdot t) \cdot {\omega_D}^2 - \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D \cdot \delta\right] \\
\ddot{x}(t) &= -x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \delta \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D - x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot \delta^2 \\
&\quad + x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot {\omega_D}^2 - x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D \cdot \delta
\end{aligned}
$$

$$\ddot{x}(t) = -2 \cdot x_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \delta \cdot \omega_D - x_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot \delta^2$$
$$+ x_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot {\omega_D}^2$$
$$\ddot{x}(t) = x_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[\cos(\omega_D \cdot t) \cdot {\omega_D}^2 - \cos(\omega_D \cdot t) \cdot \delta^2 - 2 \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \delta \cdot \omega_D\right] \quad (307)$$

Nun werden die Gleichungen für $x(t)$, $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$ in Gl. (296), S. 190 eingesetzt:

$$\ddot{x}(t) + \frac{\beta}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0$$
$$\cancel{x_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}} \cdot \left[\cos(\omega_D \cdot t) \cdot {\omega_D}^2 - \cos(\omega_D \cdot t) \cdot \delta^2 - 2 \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \delta \cdot \omega_D\right]$$
$$+ \frac{\beta}{m} \cdot \cancel{x_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}} \cdot [\sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D + \cos(\omega_D \cdot t) \cdot \delta] - \frac{D}{m} \cdot \cancel{x_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) = 0$$
$$\cos(\omega_D \cdot t) \cdot {\omega_D}^2 - \cos(\omega_D \cdot t) \cdot \delta^2 - 2 \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \delta \cdot \omega_D$$
$$+ \frac{\beta}{m} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D + \frac{\beta}{m} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot \delta - \frac{D}{m} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) = 0$$
$$\cos(\omega_D \cdot t) \cdot \left[{\omega_D}^2 - \delta^2 + \frac{\beta}{m} \cdot \delta - \frac{D}{m}\right] + \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \left[\frac{\beta}{m} \cdot \omega_D - 2 \cdot \delta \cdot \omega_D\right] = 0$$

Jetzt werden δ und ω_D entsprechend Gl. (299), S. 191 umgestellt und ersetzt:

$$\delta = \frac{\beta}{2 \cdot m} \;\rightarrow\; \beta = 2 \cdot \delta \cdot m, \quad {\omega_D}^2 = {\omega_0}^2 - \delta^2 = \frac{D}{m} - \delta^2$$

$$\cos(\omega_D \cdot t) \cdot \left[\frac{D}{m} - \delta^2 - \delta^2 + \frac{2 \cdot \cancel{m} \cdot \delta}{\cancel{m}} \cdot \delta - \frac{D}{m}\right]$$
$$+ \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \left[\frac{2 \cdot \cancel{m} \cdot \delta}{\cancel{m}} \cdot \left(\frac{D}{m} - \delta^2\right) - 2 \cdot \delta \cdot \left(\frac{D}{m} - \delta^2\right)\right] = 0$$
$$\cos(\omega_D \cdot t) \cdot \left[\underbrace{\frac{D}{m} - 2 \cdot \delta^2 + 2 \cdot \delta^2 - \frac{D}{m}}_{0}\right]$$
$$+ \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \left[\underbrace{2 \cdot \delta \cdot \frac{D}{m} - 2 \cdot \delta^3 - 2 \cdot \delta \cdot \frac{D}{m} + 2 \cdot \delta^3}_{0}\right] = 0$$
$$\underbrace{\cos(\omega_D \cdot t) \cdot 0}_{0} + \underbrace{\sin(\omega_D \cdot t) \cdot 0}_{0} = 0$$
$$0 = 0$$

Damit konnte gezeigt werden, dass der Realteil der komplexen Lösung Gl. (305), S. 192 die DGL (296), S. 190 des viskos gedämpften Federpendels erfüllt.

Eine in der Rechenpraxis oft sehr nützliche Kontrollmöglichkeit hergeleiteter Gleichungen ist die Einheitengleichung, denn eine stimmige Einheitengleichung ist zwar keine *hinreichende*, aber dennoch *notwendige* Bedingung für die Richtigkeit einer Gleichung insgesamt. Hier soll nun die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ω_D überprüft werden (→ Gl. (301), S. 191), die mit 1/s bekannt ist. Zunächst werden in die Gleichung für ω_D die Gleichungen Gl. (269), S. 178 und Gl. (299), S. 191 eingesetzt:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad \delta = \frac{\beta}{2 \cdot m} = \frac{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}{2 \cdot m} = \frac{3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}{m}$$

Mit $[\eta] = \mathrm{kg}/(\mathrm{m} \cdot \mathrm{s})$ für die Viskosität folgt dann für ω_D:

$$\omega_D = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} \quad \rightarrow \quad \omega_D = \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}{m}\right)^2}$$

Durch Einsetzen der Einheiten ergibt sich dann die Einheitengleichung:

$$[\omega_D] = \sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kg}}} - \left(\frac{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{kg}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\cancel{\mathrm{kg}} \cdot \cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2 \cdot \cancel{\mathrm{m}}} \cdot \frac{1}{\cancel{\mathrm{kg}}} - \left(\frac{\frac{\cancel{\mathrm{kg}}}{\cancel{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{s}}}{\cancel{\mathrm{kg}}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\mathrm{s}^2} - \left(\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{s}^2} - \frac{1}{\mathrm{s}^2}} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{s}^2}} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Die Richtigkeit der Einheitengleichung konnte damit gezeigt werden. Insbesondere bei längeren Herleitungen bietet es sich an, auch zwischendurch kurz die Stimmigkeit der Einheiten zu überprüfen.

Beispiel 7.3 Ein Federpendel mit einer Federkonstanten von $D = 2$ N/m und einer angehängten kleinen Kugel mit einer Masse von $m = 4$ g und einem Radius von $r = 5$ mm wurde unter Öl um $\Delta x = -2$ cm ausgelenkt und damit zum Schwingen angeregt (→ Abb. 119, S. 189). Die Viskosität des Öls soll hier mit $\eta = 0,1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ angenommen werden. Gesucht ist die Dämpfungskonstante δ, die Winkelgeschwindigkeit ω_D, die Schwingungsdauer T, die Ort-Zeit-Funktionsgleichung sowie das Diagramm des zeitlichen Verlaufes.

Zuerst wird die Winkelgeschwindigkeit des ungedämpften Federpendels ω_0 berechnet:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{2\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{0,004\ \mathrm{kg}}} = 22,36\ \frac{1}{\mathrm{s}} = 22,36\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Nun muss die Dämpfungskonstante δ berechnet werden:

$$\delta = \frac{3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}{m} = \frac{3 \cdot \pi \cdot 0,1\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}} \cdot 0,005\ \mathrm{m}}{0,004\ \mathrm{kg}} = 1,18\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Mit ω_0 und δ ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit des gedämpften Federpendels ω_D:

$$\omega_D = \sqrt{\left(22,36\ \frac{1}{\text{s}}\right)^2 - \left(1,18\ \frac{1}{\text{s}}\right)^2} = 22,33\ \frac{1}{\text{s}}$$

Bei gedämpften Schwingungen ist die Winkelgeschwindigkeit ω_D im Schwingungsfall immer kleiner, als sie es ohne Dämpfung mit ω_0 wäre: $\omega_D < \omega_0$

Durch Einsetzen von δ, ω_0 und ω_D in Gl. (309), S. 196 ergibt sich die Ort-Zeit-Funktionsgleichung des viskos gedämpften Federpendels:

$$x(t) = -0,02\ \text{m} \cdot \cos\left(22,33\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \cdot e^{-1,18\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t}$$

Die Abb. 120 zeigt den zeitlichen Verlauf der kleinen Kugel während sie in Öl schwingt:

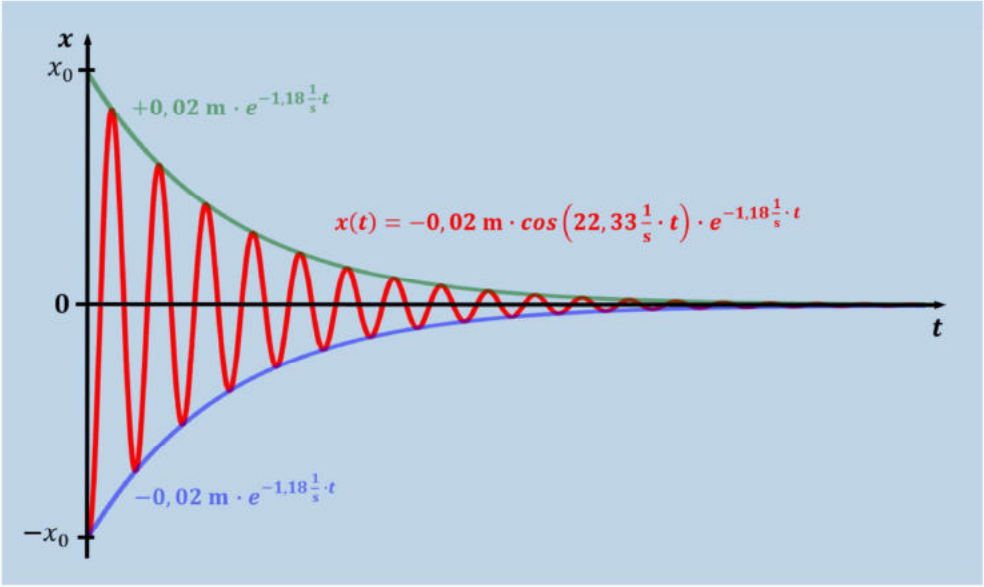


Abb. 120: Ort-Zeit-Diagramm eines viskos gedämpften Federpendels

Dabei folgt die Abnahme der Amplitude einer Exponentialfunktion, wie dies auch die beiden Hüllfunktionen zeigen. Abschließend wird noch die Schwingungsdauer T berechnet:

$$\omega_D = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{22,33\ \frac{1}{\text{s}}} = 0,28\ \text{s}$$

7.3.1 Abklingverhalten bei viskos gedämpften Oszillatoren

Betrachtet man die Gleichung der Winkelgeschwindigkeit des gedämpften Oszillators Gl. (301), S. 191, dann ergeben sich für die Diskriminante drei Fälle:

$$\omega_D = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \left({\omega_0}^2 - \delta^2\right) > 0 & \text{Schwingungsfall} \\ \left({\omega_0}^2 - \delta^2\right) = 0 & \text{Aperiodischer Grenzfall} \\ \left({\omega_0}^2 - \delta^2\right) < 0 & \text{Kriechfall} \end{cases} \tag{308}$$

7.3.1.1 Schwingungsfall

Im Schwingungsfall ist die Diskriminante mit ${\omega_0}^2 > \delta^2$ größer als null und somit kann die Wurzel berechnet werden. Dieser Fall lässt sich mit dem Realteil der komplexen Lösung beschreiben (→ Gl. (309), S. 196):

Ort-Zeit-Funktion des viskos gedämpften Federpendels (Schwingungsfall)

$$x(t) = -x_0 \cdot \cos\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} \cdot t\right) \cdot e^{-\delta \cdot t} = -x_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t} \tag{309}$$

7.3.1.2 Aperiodischer Grenzfall

Von aperiodischem Grenzfall spricht man dann, wenn ${\omega_0}^2$ und δ^2 mit ${\omega_0}^2 = \delta^2$ gleich groß sind. Damit wird die Diskriminante und damit auch das Argument des Kosinuses null (→ Gl. (301), S. 191):

$$x(t) = -x_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t} = \underbrace{-x_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\underbrace{{\omega_0}^2 - \delta^2}_{0}} \cdot t\right)}_{1} \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

Ort-Zeit-Funktion des viskos gedämpften Federpendels (aperoid. Grenzfall)

$$x(t) = -x_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \tag{310}$$

Durch den nur noch exponentiellen Verlauf der $x(t)$-Funktion finden hier keine Schwingungen im eigentlichen Sinne mehr statt. Aperiodische Dämpfungen werden in der Praxis dann eingesetzt, wenn Systeme schnellstmöglich gegen null laufen sollen.