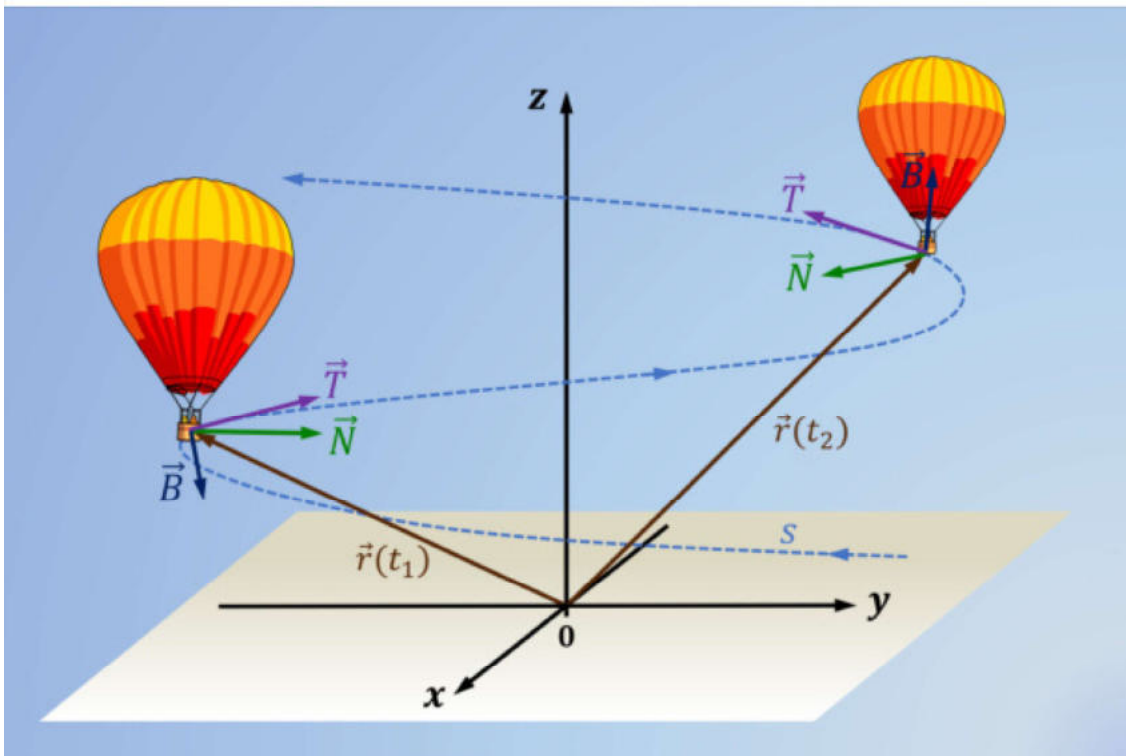


Thomas Amenda

Elemente der Kinematik

Zwischen Oberstufe und Grundstudium



2. Auflage

Lehrbuch

BoD

Vorwort zur zweiten Auflage

In dieser zweiten Auflage wurden zunächst kleinere Fehler korrigiert sowie einige Verbesserungen und Umstrukturierungen vorgenommen. Neu hinzu gekommen ist ein Kapitel zum Lagrange-Formalismus sowie eines über Schwingungen. Ich hoffe dadurch nun alle wesentlichen Elemente der Kinematik berücksichtigt zu haben, damit der Einstieg in ein natur- oder ingenieurwissenschaftliches Studium gut gelingt.

Die im Rahmen meines Forschungsprojektes am IDN der Universität Bremen und meiner langjährigen Lehrtätigkeit an den BBS Ammerland entwickelte Unterrichtskonzeption zur Lehre der Kinematik für Oberstufenschüler, stelle ich gerne allen interessierten Kollegen, Referendaren und (Lehramts-)Studenten zur Verfügung. Die notwendigen Unterlagen, bestehend aus einem 35-seitigen Skript, einer Formelsammlung sowie einer kleinen Animation zum Einstieg, stehen auf der Website zum Buch zum Download zur Verfügung. Die detaillierten Lösungen können selbstverständlich vorab bei mir per E-Mail angefordert werden. An einem Erfahrungsaustausch mit Kollegen bin ich nach wie vor sehr interessiert.

Eine kurze Vorstellung meiner Kinematik-Konzeption findet sich auch in dem von T. Wilhelm, H. Schecker und M. Hopf herausgegebenen Lehrbuch *Unterrichtskonzeptionen für den Physikunterricht - Ein Lehrbuch für Studium, Referendariat und Unterrichtspraxis*.

Mein herzlicher Dank gilt auch hier wieder Dipl.-Ing. Karl Withake von den BBS Ammerland für die kritische Durchsicht des Manuskripts und die hilfreichen Verbesserungsvorschläge. Mein ganz besonderer Dank gilt wie immer meiner Frau Ingrid für das Korrekturlesen und ihr Verständnis, dieses Buch unbedingt noch verbessern und erweitern zu müssen.

Natürlich gehen alle übersehenen Fehler auch weiterhin auf meine Kappe. Für Anregungen und Kritik bin ich immer dankbar. Alle mir bekannten Fehler und Verbesserungen werden selbstverständlich auf der Website zum Buch veröffentlicht. Auf der Website stehen auch weiterhin die den Simulationen, Modellierungen und Diagrammen zugrunde liegenden Dateien zum Download bereit.

Oldenburg, im Winter 2021/22

Thomas Amenda

Formelzeichen

t, t_i	Allgemeiner bzw. i-ter Zeitpunkt	s
t_0	Startzeitpunkt, fast immer $t_0 = 0$	s
t_1, t_a	Anfang eines beliebigen Zeitintervalls	s
t_2, t_e	Ende eines beliebigen Zeitintervalls	s
t_{ges}	Gesamtzeit einer Bewegung mit $t_0 = 0$	s
$\Delta t, \Delta t_i$	Allgemeines Zeitintervall bzw. i-tes Zeitintervall	s
dt	Infinitesimal kleines Zeitintervall	s
$P(x/y/z)$	Raumpunkt im \mathbb{R}^3	-
x, y, z	Koordinaten im \mathbb{R}^3	m
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	Einheitsvektoren im \mathbb{R}^3 (orthogonale Basis)	1
\vec{r}	Ortsvektor	m
r_{\perp}, r_{\parallel}	Senkrechte bzw. parallele Komponente des Ortsvektors	m
$\vec{r}_0, \vec{r}(t_i)$	Ort zum Zeitpunkt t_0 bzw. t_i	m
$\vec{r}(t)$	Ortsfunktion	m
$\Delta \vec{r}(\Delta t)$	Ortsverschiebung im Zeitintervall Δt	m
$\Delta \vec{r}(t_1, t_2)$	Ortsverschiebung zwischen t_1 und t_2	m
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Komponenten des Ortsverschiebungsvektors	m
$ \Delta \vec{r}(\Delta t) $	Betrag der Ortsverschiebung im Zeitintervall Δt	m
$ \Delta \vec{r}(t_1, t_2) $	Betrag der Ortsverschiebung zwischen t_1 und t_2	m
$d\vec{r}(t)$	Infinitesimal kleine Ortsverschiebung zum Zeitpunkt t	m
$ d\vec{r}(t) $	Betrag der infinitesimal kleinen Ortsverschiebung	m
dx, dy, dz	Komponenten der infinitesimal kleinen Ortsverschiebung	m
$\Delta s(\Delta t)$	Im Zeitintervall Δt zurückgelegtes Wegelement	m
$ds(t)$	Infinitesimal kleines Wegelement zum Zeitpunkt t	m
$s_{ges}(t_{ges})$	Gesamtweg zum Zeitpunkt t_{ges}	m
$\vec{v}(t)$	Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t	m/s
$\vec{v}(t_1, t_2)$	Geschwindigkeit im Zeitintervall von t_1 bis t_2	m/s
$ \vec{v}(t) $	Geschwindigkeitsbetrag zum Zeitpunkt t	m/s
v_x, v_y, v_z	Komponenten des Geschwindigkeitsvektors	m/s
\vec{v}_0	Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0	m/s
v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}	Komponenten des Geschwindigkeitsvektors bei t_0	m/s
\vec{v}_B	Bahngeschwindigkeit (Drehbewegungen)	m/s

Inhaltsverzeichnis

Teil 1	Grundlagen	1
1	Bedeutung der Kinematik für die Mechanik	1
2	Vektoren in der Physik	5
2.1	Darstellung von Vektoren	5
2.1.1	Darstellung mit Spalten- und Zeilenvektoren	6
2.1.2	Darstellung mit Einheitsvektoren	7
2.2	Spezielle Vektoren	8
2.2.1	Ortsvektoren	8
2.2.2	Ortsverschiebungsvektoren	10
2.2.3	Axiale Vektoren	11
⇒ Exkurs	Lösung von 3×3 -Determinanten	12
2.2.4	Kräfte	16
2.3	Drehwinkel	19
3	Translationsbewegungen	21
3.1	Bewegungstypen	21
3.1.1	Typ A: Geradlinige Bewegung mit konstantem Tempo	22
3.1.2	Typ B: Geradlinige Bewegung mit Tempoänderung	22
3.1.3	Typ C: Nicht geradlinige Bewegung mit konstantem Tempo	23
3.1.4	Typ D: Nicht geradlinige Bewegung mit Tempoänderung	24
3.2	Beschreibungsgrößen	24
3.2.1	Ort und Ortsfunktion	25
3.2.2	Ortsverschiebung und Weg	25
3.2.3	Durchschnittsgeschwindigkeit und Durchschnittstempo	29
3.2.4	Momentangeschwindigkeit und Momentantempo	32
⇒ Exkurs	Darstellung von Funktionen in Mathematik und Physik	33
3.2.5	Durchschnittsbeschleunigung	36
⇒ Exkurs	Die Einheit der Beschleunigung	49
3.2.6	Momentanbeschleunigung	50
⇒ Exkurs	Winkelmaße	56
⇒ Exkurs	Diagramme in der Kinematik	61
3.2.7	Begleitendes Dreibein	71
3.2.8	Klothoiden	82
3.3	Newtonsche Bewegungsgleichung	90
4	Relativistische Kinematik	95
4.1	Historische Entwicklungen	95
4.2	Postulate der SRT	96
4.3	Galilei-Transformation	97

4.4	Relativität der Gleichzeitigkeit	98
4.5	Relativität der Zeit	101
4.6	Lorentz-Transformation	107
4.6.1	Herleitung über Korrekturfaktor	108
4.6.1.1	Herleitung des Korrekturfaktors k	108
4.6.1.2	Herleitung der Transformationsgleichung für t'	109
4.6.1.3	Herleitung der Transformationsgleichung für t	110
4.6.1.4	Transformationsgleichungen	110
4.6.2	Herleitung über Bezugssysteme	112
4.6.2.1	Herleitung der Transformationsgleichung für t'	112
4.6.2.2	Herleitung der Transformationsgleichung für t	113
4.7	Relativität der Länge	114
4.7.1	Herleitung der Längenkontraktion über die Lorentz-Transformation	114
4.7.2	Herleitung der Längenkontraktion über die Zeitdilatation	116
4.8	Addition von Geschwindigkeiten	123
4.8.1	Herleitung der Gleichung für u_x	123
4.8.2	Herleitung der Gleichungen für u_y und u_z	124
4.9	Raum-Zeit-Diagramme	126
4.9.1	Konstruktion von Minkowski-Diagrammen	127
4.9.2	Gleichortigkeit und Gleichzeitigkeit	132
4.9.3	Von Ort-Zeit- zu Minkowski-Diagrammen	134
5	Systemdynamik	139
5.1	Grundlagen der Systemdynamik	139
5.2	Der Begriff System	139
5.3	Größen und Numerik der Systemdynamik	139
5.4	Grundstruktur dynamischer Systeme	141
5.5	Ort-Zeit-Funktionsgleichung und Iterationsgleichung	146
6	Lagrange-Formalismus	149
6.1	Arbeit und Energie	149
6.1.1	Beschleunigungsarbeit und kinetische Energie	151
6.1.2	Schwerefeld	153
6.1.3	Hubarbeit und potentielle Energie	155
6.2	Kartesische Koordinaten	159
6.3	Freiheitsgrade	159
6.4	Zwangsbedingungen	160
6.5	Generalisierte Koordinaten	162
6.6	Lagrange-Funktion	163
6.7	Lagrange-Gleichung	164
7	Schwingungen	173
7.1	Federpendel	173

2.1.1 Darstellung mit Spalten- und Zeilenvektoren

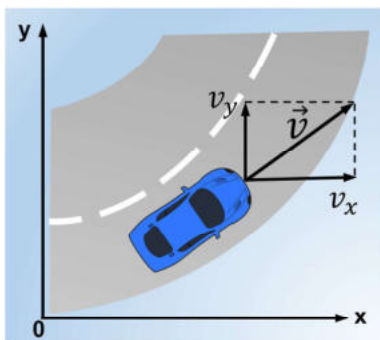


Abb. 3: Vektorkomponenten

Um nun auch die Richtung eines sich bewegenden Körpers anzugeben, wird ein Koordinatensystem benötigt. In der Physik wird üblicherweise der dreidimensionale euklidische Raum mit den Koordinaten x , y und z verwendet.

In Abb. 3 steht die z -Koordinate senkrecht auf der Straßen- bzw. Blattebene (Rechtssystem \rightarrow Schraubenregel). Die Geschwindigkeit des Autos wird durch den Vektor \vec{v} dargestellt. Dabei werden Vektoren in Gleichungen meistens in Spaltenschreibweise, und im Fließtext in Zeilenschreibweise dargestellt. In beiden Darstellungen werden seine drei Komponenten v_x , v_y und v_z angegeben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z), \quad |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1)$$

Der Betrag des Vektors wird mit Hilfe des Satzes von Pythagoras errechnet mit Betragstrichen gekennzeichnet (\rightarrow Kap. 2.2.1, S. 8). Gl. (8), S. 9 zeigt den Zusammenhang von Spalten- und Zeilenvektoren etwas genauer. Obwohl sich das Auto hier nur in der x - y -Ebene bewegt, werden trotzdem alle drei Komponenten angegeben.

Beispiel 2.1 Das Auto aus dem Anfangsbeispiel in Abb. 3 soll sich mit 25 m/s in x -Richtung, mit 15 m/s in y -Richtung und sich in z -Richtung gar nicht bewegen. Mit den drei bekannten Komponenten kann die Geschwindigkeit in Spaltenschreibweise als sog. Spaltenvektor angegeben werden:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Wenn alle drei Komponenten die gleiche Einheit haben, dann kann man die Einheit aus dem Spaltenvektor herausziehen. Der Betrag errechnet sich dann mit Gl. (1):

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(25 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 29,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Damit ergibt sich der Tachowert des Autofahrers mit $29,15 \cdot 3,6 \text{ km/h}$ zu $104,95 \text{ km/h}$. An dieser Stelle wird deutlich, dass Beträge von Vektoren, also auch Tachowerte, immer positive Werte annehmen.

2.1.2 Darstellung mit Einheitsvektoren

Die Komponenten von Vektoren sind ihrerseits auch wieder Vektoren. In der Praxis lässt man dann aber die Vektorpfeile über den Komponenten oft weg und schreibt z.B. v_x und nicht \vec{v}_x , was eigentlich nicht ganz richtig ist. Insbesondere in der Feldtheorie führt dieses Vorgehen jedoch häufig zu Problemen. Um mathematisch konsistent zu sein, verwendet man dann die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bzw. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. In kartesischen Koordinatensystemen \mathbb{R}^3 werden sie meistens mit $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ bezeichnet. Für die x -Komponente \vec{v}_x würde man dann $v_x \cdot \vec{e}_x$ schreiben. Grundsätzlich sind Einheitsvektoren dimensionslose Vektoren mit dem Betrag 1, die nur die reine Richtung angeben:

Einheitsvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Die Darstellung mit den Einheitsvektoren zeigt sehr anschaulich, dass Vektoren geometrisch addiert werden (Gl. (5)). Insbesondere in der Technischen Mechanik lassen sich bei statischen Problemen Kräfte mit entsprechendem Maßstab auch grafisch addieren und subtrahieren. Einheitsvektoren sind beim Rechnen oft sehr nützlich. Dabei gelten folgende Gleichungen:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \quad (3)$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0 \quad (4)$$

Somit lässt sich die Geschwindigkeit auch mit Einheitsvektoren darstellen:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y + v_z \cdot \vec{e}_z \quad (5)$$

Die Darstellung in Gl. (6) zeigt sehr anschaulich, dass sich die Geschwindigkeit aus einem Betrag $|\vec{v}|$ und einer Richtung \vec{e}_v zusammensetzt:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{e}_v \quad \vec{e}_v = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} \quad (6)$$

Dabei zeigt der Einheitsvektor \vec{e}_v in Richtung der Geschwindigkeit \vec{v} .

Beispiel 2.2 Mit den Ergebnissen aus Beispiel 1 und Gl. (6) lässt sich die Geschwindigkeit nun so darstellen, dass Betrag $|\vec{v}|$ und Richtung \vec{e}_v sofort erkennbar sind.

$$\vec{e}_v = \frac{1}{29,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow \vec{e}_v = \begin{pmatrix} 0,86 \\ 0,51 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v} = 29,15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \begin{pmatrix} 0,86 \\ 0,51 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zur Überprüfung des Ergebnisses kann jetzt der Betrag des Einheitsvektors in Richtung der Geschwindigkeit, der ja 1 sein muss, berechnet werden:

$$|\vec{e}_v| = \sqrt{(0,86)^2 + (0,51)^2 + (0)^2} = 1$$

Die Richtungsangabe \vec{e}_v bezieht sich übrigens immer auf das zuvor gewählte Koordinatensystem. Eine Drehung des Koordinatensystems würde nur die Richtung \vec{e}_v , nicht aber den Betrag $|\vec{v}|$ (Tachowert) ändern.

2.2 Spezielle Vektoren

Bislang wurden Geschwindigkeitsvektoren von Autos betrachtet. Im mathematischen Sinne gehören diese Vektoren zu den freien Vektoren. Freie Vektoren gehören einer Pfeilkategorie an, bzw. einer von ihnen repräsentiert eine solche.

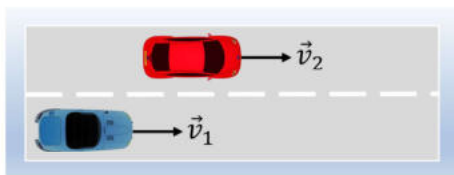


Abb. 4: Geschwindigkeitsvektor als Pfeilkategorie

Richtung zu den beiden Autos bewegen, auch den gleichen Geschwindigkeitsvektor \vec{v} haben. Am Rande bemerkt ist der „Tachowert“ keine „wirkliche“ physikalische Größe. Der Tachowert entspricht dem Momentantempo, das wiederum dem Betrag der Momentangeschwindigkeit entspricht. Veranschaulicht wird das Tempo bzw. der Betrag des Geschwindigkeitsvektors durch die Länge des entsprechenden Vektorpfeils.

Die Abb. 4 zeigt zwei Autos, die beide mit gleichem Tachowert $|\vec{v}|$ in die gleiche Richtung \vec{e}_v fahren. Daher haben beide Autos auch den gleichen Geschwindigkeitsvektor: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$. Es ist unmittelbar einsichtig, dass alle Autos, die sich mit gleichem Tachowert parallel und in gleiche

richtung zu den beiden Autos bewegen, auch den gleichen Geschwindigkeitsvektor \vec{v} haben. Am Rande bemerkt ist der „Tachowert“ keine „wirkliche“ physikalische Größe. Der Tachowert entspricht dem Momentantempo, das wiederum dem Betrag der Momentangeschwindigkeit entspricht. Veranschaulicht wird das Tempo bzw. der Betrag des Geschwindigkeitsvektors durch die Länge des entsprechenden Vektorpfeils.

2.2.1 Ortsvektoren

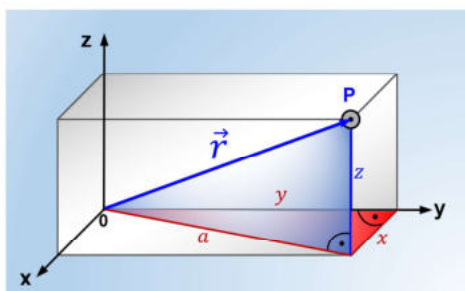


Abb. 5: Ortsvektor im \mathbb{R}^3

In diesem Zusammenhang wird der Ursprung auch als Nullvektor

Im Gegensatz zu den freien Vektoren, die einer Pfeilkategorie angehören, sind Ortsvektoren *gebundene* Vektoren, die keine Pfeilkategorie repräsentieren. Alle Ortsvektoren haben jedoch zwei Gemeinsamkeiten: sie haben ihren Fußpunkt im Ursprung des Koordinatensystems und ihre Spitze zeigt auf einen Punkt P im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 .

In Abb. 5 zeigt der Ortsvektor \vec{r} auf den Schwerpunkt eines Körpers, der sich im

$\vec{0} = (0, 0, 0)$ bezeichnet. Punkte oder Positionen im Raum können also durch ihre Ortsvektoren repräsentiert werden:

Raumpunkt und Ortsvektor

$$P(x/y/z) \rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ (Spaltenvektor), } \vec{r} = (x, y, z) \text{ (Zeilenvektor)} \quad (7)$$

Hinweis: Ganz korrekt müsste der Zeilenvektor mit einem hochgestellten T (für transponiert) versehen werden: $\vec{r} = (x, y, z)^T$. Unter Transponieren versteht man in diesem Zusammenhang die Vertauschung aller Zeilen mit den entsprechenden Spalten. So entsteht durch Transponieren aus einem Spaltenvektor ein Zeilenvektor und umgekehrt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T := (x, y, z), \quad (x, y, z)^T := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8)$$

Da sich die drei Komponenten der Vektoren in \mathbb{R}^3 als einspaltige Matrizen darstellen lassen, wird das T meistens nicht mitgeschrieben. Sobald jedoch entsprechende Berechnungen mit Matrizen durchzuführen sind, muss das hochgestellte T unbedingt mitgeführt werden.

Der Betrag des Ortsvektors entspricht der Länge des Vektorpfeils und somit dem direkten Abstand des entsprechenden Raumpunktes vom Ursprung. Die Berechnung erfolgt durch zweimaliges Anwenden des Satzes von Pythagoras (\rightarrow Abb. 5, S. 8):

$$|\vec{r}|^2 = a^2 + z^2 \text{ mit } a^2 = x^2 + y^2 \rightarrow |\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Betrag des Ortsvektors

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (9)$$

In Kap. 3.2.1, S. 25 wird der Ortsvektor dann unter kinematischen Aspekten betrachtet und mit der Zeit t parametrisiert, was dann zur Ortsfunktion führt.

Beispiel 2.3 Der Punkt in Abb. 5, S. 8 soll folgende Koordinaten haben: $x = 3$ m, $y = 9$ m und $z = 5$ m. Gesucht ist der Ortsvektor sowie der Abstand des Punktes vom Ursprung.

Zuerst kann der Ortsvektor entsprechend Gl. (7) als Spaltenvektor angegeben werden:

$$P(3/9/5) \text{ m} \rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ m}$$

Der Abstand von P zum Ursprung lässt sich einfach mit Gl. (9), S. 9 berechnen:

$$|\vec{r}| = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (9 \text{ m})^2 + (5 \text{ m})^2} = 10,72 \text{ m}$$

2.2.2 Ortsverschiebungsvektoren

Der Ortsverschiebungsvektor $\Delta\vec{r}$, kurz Ortsverschiebung genannt, hat insbesondere in der Kinematik eine wichtige Bedeutung (\rightarrow Kap. 3.2.2, S. 25). So wird z.B. die Geschwindigkeit mit Hilfe der Ortsverschiebung definiert. Die Ortsverschiebung ist ein Vektor, der die beiden Orte \vec{r}_1 und \vec{r}_2 direkt miteinander verbindet (\rightarrow Abb. 6). Dabei zeigt der Ortsverschiebungsvektor vom Anfangspunkt P_1 zum Endpunkt P_2 . Da sich der Ortsverschiebungsvektor formal aus der Subtraktion zweier Vektoren ergibt, wird er in der Mathematik auch als Differenzvektor bezeichnet.

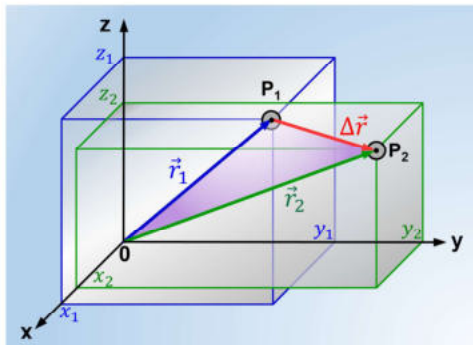


Abb. 6: Orts- und Verschiebungsvektoren im \mathbb{R}^3

Der Ortsverschiebungsvektor kann sehr einfach über einen geschlossenen Polygonzug berechnet werden: Bei einem geschlossenen Polygonzug werden die entsprechenden Vektoren geometrisch addiert. Dazu beginnt man am besten im Fußpunkt eines (beliebigen) Vektors und „wandert“ zu dessen Spitze. Dann erreicht man den Fußpunkt oder die Spitze des nächsten Vektors usw. Das geometrische Addieren ist dann beendet, wenn man wieder am Startpunkt angekommen ist, also der Polygonzug geschlossen ist. Wandert man vom Fußpunkt zur Spitze, erhält der entsprechende Vektor ein positives Vorzeichen. Muss man von der Spitze zum Fußpunkt wandern, erhält der Vektor ein negatives Vorzeichen. Dabei spielt es keine Rolle, ob im oder entgegen des Uhrzeigersinns gewandert wird. Auch der Startpunkt kann beliebig gewählt werden. Am Beispiel des Ortsverschiebungsvektors in Abb. 6 soll das Verfahren gezeigt werden:

$$+\vec{r}_1 + \Delta\vec{r} - \vec{r}_2 = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Somit ergibt sich der Ortsverschiebungsvektor allgemein mit Gl. (10):

Ortsverschiebungsvektor

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (10)$$

Der Betrag des Ortsverschiebungsvektors ist der direkte Abstand zwischen beiden Punkten P_1 und P_2 :

Betrag des Ortsverschiebungsvektors

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \quad (11)$$

Übrigens ist das hier gezeigte Verfahren des geschlossenen Polygonzugs mathematisch die einfache Subtraktion zweier Vektoren. Hier zeigt sich sehr schön, dass Vektoren addiert bzw. subtrahiert werden, indem man ihre Komponenten separat addiert bzw. subtrahiert.

Beispiel 2.4 Die beiden Punkte P_1 und P_2 in Abb. 6, S. 10 sollen durch folgende Ortsvektoren repräsentiert werden: $\vec{r}_1 = (5, 7, 8)$ m und $\vec{r}_2 = (4, 9, 6)$ m. Zur Berechnung der Ortsverschiebung werden die Ortsvektoren in Gl. (10), S. 10 eingesetzt:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \rightarrow \Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ m} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m}$$

Die Komponenten des Ortsverschiebungsvektors lassen folgende Aussagen über die Bewegung des Körpers zu: So sieht man, dass sich der Körper im Zeitintervall Δt um 1 m entgegen der positiven x -Richtung, um 2 m in positive y -Richtung und um 2 m entgegen der positiven z -Richtung bewegt hat. Der direkte Abstand „Luftlinie“ zwischen P_1 und P_2 lässt sich mit Gl. (11) angeben:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(-1 \text{ m})^2 + (2 \text{ m})^2 + (-2 \text{ m})^2} = 3 \text{ m}$$

Wie der Betrag des Geschwindigkeitsvektors, kann der Betrag des Ortsverschiebungsvektors immer nur ein positiver Zahlenwert sein. Dies wird deutlich, wenn man sich klar macht, dass der Abstand $|\Delta\vec{r}|$ ja auch kein Vektor ist. Der direkte Abstand ist nicht mit dem tatsächlich von einem Körper zurückgelegten Weg auf seiner Bahnkurve gleichzusetzen. Denn wenn sich der Körper nicht direkt von P_1 nach P_2 bewegt, ist der zurückgelegte Weg natürlich größer als die „Luftlinie“.

2.2.3 Axiale Vektoren

Vektoren wie die Geschwindigkeit, die Ortsverschiebung und auch die Beschleunigung gehören zu den polaren Vektoren. Diese sind mit einer Maßzahl und einer Richtungsangabe vollständig beschrieben. Sollen aber z.B. Drehbewegungen beschrieben werden, benötigt man noch eine andere Art von Vektoren, die axialen Vektoren. Um axiale Vektoren vollständig zu beschreiben, wird neben der Maßzahl, der Richtungsangabe

den beiden vertikalen Strichen links und rechts der Spalten. Nach der Regel von Sarrus werden nun im zweiten Schritt die ersten beiden Spalten nochmals rechts neben die Determinante angehängt.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Im dritten und letzten Schritt werden jeweils die drei Elemente der drei von links-oben nach rechts-unten zeigenden Diagonalen (durchgezogenen Pfeile) multipliziert und die Diagonalen addiert:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

Dann werden die drei Elemente der drei von links-unten nach rechts-oben zeigenden Diagonalen (gestrichelte Pfeile) multipliziert und die Diagonalen subtrahiert:

$$-a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

So ergibt sich die Determinante der Matrix A mit folgender Gleichung:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Beispiel 2.5 In diesem Beispiel soll die Bahngeschwindigkeit \vec{v}_B des Körpers aus Abb. 7, S. 12 mit konkreten Zahlenwerten berechnet werden. Da sich der Körper in der x - y -Ebene bewegt, entspricht der Radiusvektor exakt dem Ortsvektor. Nimmt man für den Radius $|\vec{r}| = 0,8$ m an, dann folgt daraus für den Ortsvektor: $\vec{r} = (0; -0,8; 0)$ m.

Hinweis: Wenn die Zahlenwerte (hier -0,8) nicht ganzzahlig sind, dann trennt man die Komponenten in der Zeilenschreibweise durch Semikolons und nicht durch Kommas.

Davon ausgehend, dass sich der Körper fünf mal pro Sekunde um seine Drehachse dreht, lässt sich mit $\omega = 2\pi f$ die Winkelgeschwindigkeit errechnen: $\omega = 2\pi \cdot 5 \text{ s}^{-1} = 31,42 \text{ s}^{-1}$. Da der Körper hier um die z -Achse rotiert, kann $\vec{\omega}$ auch keine Komponenten in x - und y -Richtung haben. Somit ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit: $\vec{\omega} = (0; 0; 31,42) \text{ s}^{-1}$. Die Bahngeschwindigkeit kann nun leicht berechnet werden:

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 31,42 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -0,8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 31,42 \frac{1}{\text{s}} \\ 0 & -0,8 \text{ m} & 0 \end{vmatrix}$$

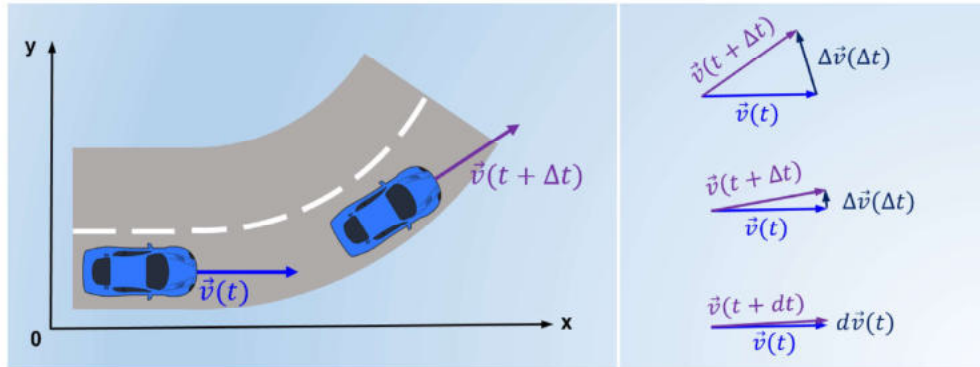


Abb. 36: Geschwindigkeitsänderung bei einer Kurvenfahrt mit konstantem Tempo

Das untere der drei Vektordiagramme soll den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ symbolisieren, bei dem aus der Differenz $\Delta \vec{v}(\Delta t)$ das Differential $d\vec{v}(t)$ wird:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \vec{v}(\Delta t)}{\Delta t} \right] = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} \quad (40)$$

Durch den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ wird aus dem Differenzenquotient der Differentialquotient. So wie die Durchschnittsbeschleunigung als Differenzenquotient von $\Delta \vec{v}(\Delta t)$ und Δt für das Zeitintervall Δt definiert wurde (\rightarrow Gl. 33, S. 37), so wird die Momentanbeschleunigung als Differentialquotient $d\vec{v}(t)$ nach dt für den Zeitpunkt t definiert. Dieser Differentialquotient ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ nach der Zeit $\vec{v}(t)$ bzw. die zweite Ableitung des Ortes $\vec{r}(t)$ nach der Zeit oder kurz die zweite Zeitableitung $\ddot{\vec{r}}(t)$. Da die infinitesimal kleine Geschwindigkeitsänderung $d\vec{v}(t)$ ein Vektor ist, werden die Differentialquotienten für jede der drei Komponenten einzeln gebildet: dv_x/dt , dv_y/dt und dv_z/dt . Dadurch erhält mit Gl. 40 die drei Komponenten der Momentanbeschleunigung. Nun kann die Momentanbeschleunigung allgemein definiert werden:

Momentanbeschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} \quad (41)$$

Wenn man die drei Vektordiagramme in Abb. 36 nun von oben nach unten vergleicht, fällt auf, dass sich mit kleiner werdendem Δt der Vektor der Geschwindigkeitsänderung $\Delta \vec{v}(\Delta t)$ im Uhrzeigersinn immer weiter aufrichtet und zum Zeitpunkt $t + dt$ senkrecht zu $\vec{v}(t)$ steht. Das bedeutet, dass der Vektor der Geschwindigkeitsänderung $\Delta \vec{v}(\Delta t)$ bzw. $d\vec{v}(t)$ keine Komponente in Richtung der Geschwindigkeit

$\vec{v}(t + dt)$ hat und sich somit auch die Länge des Geschwindigkeitsvektors - also das Tempo - nicht ändert.

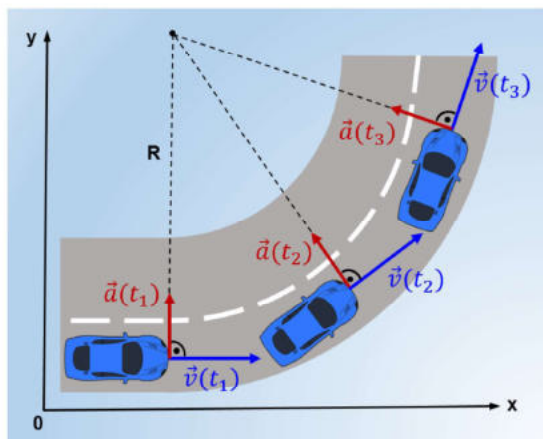


Abb. 37: Momentanbeschleunigung bei einer Kurvenfahrt mit konstantem Tempo

Da die Geschwindigkeitsänderung und die Beschleunigung nur über das Zeitintervall miteinander verknüpft sind ($d\vec{v}(t) = \vec{a}(t) \cdot dt$), zeigen sie natürlich in die gleiche Richtung. Die senkrecht zur Momentangeschwindigkeit stehende Beschleunigung $\vec{a}(t)$ führt nur zu einer Änderung der Richtung des Geschwindigkeitsvektors.

Die Abb. 37 zeigt die Momentangeschwindigkeit und die Momentanbeschleunigung zu verschiedenen Zeitpunkten. Dabei zeigen die Beschleunigungsvektoren immer zum Mittelpunkt des jeweiligen Krümmungskreises. Während der

Kurvenfahrt auf einer Kreisbahn nimmt das Auto an einer Kreisbewegung teil, die sich auch mit den bei Kreisbewegungen üblichen Beschreibungsgrößen wie Winkel φ , Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Bahngeschwindigkeit \vec{v}_B beschreiben lassen.

Die Beschleunigung \vec{a} wird dann als Radial- oder Zentripetalbeschleunigung bezeichnet. Die dafür benötigte Kraft wird entsprechend Zentripetalkraft genannt, die nicht mit der Zentrifugalkraft verwechselt werden darf.

Beispiel 3.11 Die folgende Abb. 38, S. 53 zeigt ein Auto, das eine kreisförmige Kurve mit einem konstanten Radius von $R = |\vec{r}_R(t)| = 30$ m durchfährt. Während der Kurvenfahrt bleibt das Tempo des Autos mit 12 m/s (43,2 km/h) konstant. Die Kurvenfahrt, also der Übergang vom geraden in den gekrümmten Teil der Straße, beginnt zum Zeitpunkt t_0 und endet zum Zeitpunkt t_2 , bei dem die Straße vom gekrümmten Teil wieder in den geraden Teil übergeht. Da das Auto ein ausgedehnter starrer Körper ist, muss ein Punkt den jeweiligen Ort des Autos repräsentieren, hier die Mitte der vorderen Stoßstange.

Gesucht sind die Gleichungen der Vektoren $\vec{r}(t)$, $\vec{r}_R(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$, der Ort, die Momentangeschwindigkeit, die Momentanbeschleunigung, der zurückgelegte Weg zum Zeitpunkt $t_1 = 1,8$ s sowie der Zeitpunkt t_2 , zu dem das Auto die Kurve wieder verlässt. Zusätzlich soll gezeigt werden, dass die Beschleunigung nur die Richtung, nicht aber das Tempo der Geschwindigkeit ändert.

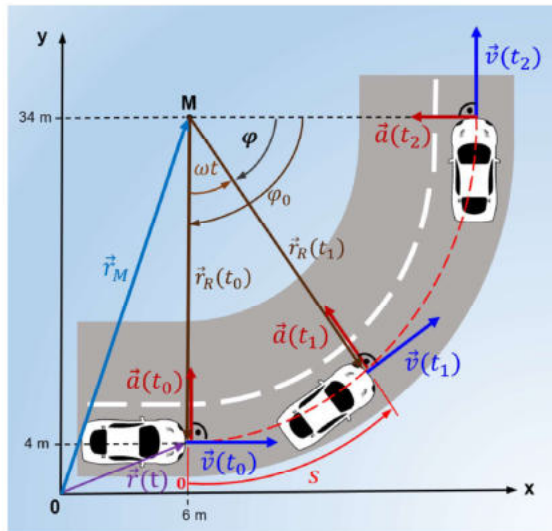


Abb. 38: Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung bei einer Kurvenfahrt mit konstantem Tempo

Da das Auto während der Kurvenfahrt an einer Kreisbewegung teilnimmt, werden hier auch die für Kreisbewegungen typischen Beschreibungsgrößen wie Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit verwendet (→ Kap. 2.2.3, S. 11).

Da sich das Koordinatensystem nicht im Kreismittelpunkt M befindet, wurden zusätzlich die Vektoren \vec{r}_M und $\vec{r}_R(t)$ eingeführt. Dabei liegt der Kreismittelpunkt bei $\vec{r}_M = (6, 34, 0)$ m. So gibt der Vektor $\vec{r}_R(t)$ die auf den Kreismittelpunkt M bezogenen Ortskoordinaten des Autos zum Zeitpunkt t an und der Vektor $\vec{r}(t)$ ist dann der „wirkliche“ Ortsvektor, der sich auf das Koordinatensystem bezieht.

tem bezieht.

Bevor nun der Ortsvektor $\vec{r}_R(t)$ für die Kurvenfahrt des Autos entwickelt wird, soll zunächst Abb. 39 betrachtet werden. Mit den trigonometrischen Funktionen ergibt sich der Ortsvektor $\vec{r}_R(t)$. Mit $R = |\vec{r}_R|$ folgt dann (→ Gl. (56), S. 57):

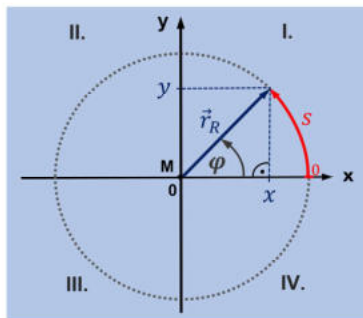


Abb. 39: Ortsvektor am Kreis

$$\left. \begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{x}{|\vec{r}_R|} \rightarrow x = |\vec{r}_R| \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) &= \frac{y}{|\vec{r}_R|} \rightarrow y = |\vec{r}_R| \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\vec{r}_R(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi(t)) \\ R \cdot \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

Jetzt muss der sich zeitlich ändernde Winkel $\varphi(t)$ durch die konstante Winkelgeschwindigkeit ω ausgedrückt werden:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \text{const.} \rightarrow \Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t \quad \text{mit } \Delta t = t \text{ und } \Delta\varphi = \varphi \rightarrow \varphi(t) = \omega t$$

Da sich das Auto während der Kurvenfahrt in einer Kreisbewegung befindet, muss jetzt die konstante Winkelgeschwindigkeit ω bzw. $|\vec{\omega}(t)|$ errechnet werden. Die Winkelgeschwindigkeit ist ein axialer Vektor, der hier senkrecht auf der Blattebene steht und

nach oben zeigt (\rightarrow Kap. 2.2.3, S. 11). Da hier die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ und der Vektor $\vec{r}_R(t)$ senkrecht zueinander stehen (\rightarrow Abb. 38, S. 53), ist $\alpha = \sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{r}) = 90^\circ$ und somit ist $\sin(90^\circ) = 1$. Aber auch $\vec{v}(t)$ und $\vec{r}(t)$ stehen zu jedem Zeitpunkt senkrecht zueinander. Da die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ immer tangential zur Bahn steht, wird sie in diesem Zusammenhang auch als Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_B(t)$ bezeichnet. Weil das Auto nur während der Kurvenfahrt an einer Kreisbewegung teilnimmt, also nicht wirklich rotiert, wird hier die Geschwindigkeit weiter nur mit $\vec{v}(t)$ bezeichnet. Winkelgeschwindigkeit, Ortsvektor und (Bahn-)Geschwindigkeit sind über das Vektorprodukt miteinander verknüpft:

Vektorprodukt	
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (43)$	
$\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin(\alpha) \rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{ \vec{a} \times \vec{b} }{ \vec{a} \cdot \vec{b} }\right) \quad (44)$	
$\text{Orthogonalität: } \vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \leftrightarrow \sin(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = 1 \quad (45)$	

Nun kann die Winkelgeschwindigkeit über das Vektorprodukt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \rightarrow |\vec{v}(t)| = |\vec{\omega}(t)| \cdot |\vec{r}(t)| \cdot \sin(\alpha) \quad \text{mit } \sin(90^\circ) = 1 \rightarrow \\ |\vec{\omega}(t)| &= \frac{|\vec{v}(t)|}{|\vec{r}(t)|} = \frac{|\vec{v}(t)|}{|\vec{r}_R(t)|} = \frac{12 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{30 \text{ m}} = 0,4 \frac{1}{\text{s}} \end{aligned} \quad (46)$$

Das Auto in diesem Beispiel (Abb. 38, S. 53) fährt zum Zeitpunkt t_0 von einem geraden Abschnitt in eine Linkskurve ein, die sich im IV. Quadranten befindet. Dort beginnt dann die Bogenlänge s , also der Weg auf dem Kreisbogen, beginnend mit $s(t_0) = 0$ zuzunehmen. Da die Ortsfunktion auf trigonometrischen Funktionen basiert, ist der Winkel $\varphi(t)$ von großer Bedeutung. Man kann sich den Ortsvektor \vec{r}_R als einen (hier) mit $|\vec{\omega}| = \omega = 0,4 \text{ rad/s}$ rotierenden Zeiger vorstellen. Natürlich gilt die Rotation hier nur für den Viertelkreis der Kurve.

In Abb. 39, S. 53 startet der Zeiger zum Zeitpunkt t_0 bei $\varphi(t_0) = 0$ und der Ortsvektor liegt auf der x -Achse und zeigt nach rechts: $\vec{r}_R(t_0) = (|\vec{r}|, 0, 0)$. Bei der Kurvenfahrt in diesem Beispiel liegt der Ortsvektor $\vec{r}_R(t)$ bei der Einfahrt in die Kurve jedoch auf der y -Achse und zeigt nach unten: $\vec{r}_R(t_0) = (0, -|\vec{r}_R|, 0)$ (\rightarrow Abb. 38, S. 53). Dadurch ist der Winkel zum Zeitpunkt t_0 nicht mehr Null, sondern $\varphi(t_0) = -\pi/2$.

In der Wechselstromtechnik und der Schwingungslehre wird der Winkel $\varphi(t)$ als Phasenwinkel und $\varphi(t_0)$ als Phasenverschiebungswinkel oder Nullphasenwinkel φ_0 bezeichnet. Dabei führt $\varphi_0 \neq 0$ stets zu einer Verschiebung der Sinus- bzw. Kosinus-Kurve bezüglich der Abszisse (hier t -Achse).

7 Schwingungen

Bewegungen bei denen Körper periodisch zwischen zwei Orten hin und her pendeln, lassen sich ganz allgemein als Schwingungen bezeichnen. Charakteristisch für Schwingungen ist u.a., dass der schwingende Körper an den beiden zuletzt erreichten Orten zur Ruhe kommt und dann seine Bewegungsrichtung umkehrt. Somit sind Schwingungen auch immer Bewegungen mit *nicht* konstanter Beschleunigung. Das in Abb. 105, S. 170 behandelte ebene Pendel führt genau so eine Bewegung aus. Die dem ebenen Pendel zugrunde liegende DGL (251), S. 168 wurde im Rahmen des Lagrange-Formalismus bereits entwickelt und die kinematischen Bewegungsgleichungen hergeleitet. Da Schwingungen nicht nur in der Physik von großer Bedeutung sind, sollen sie in diesem Kapitel etwas genauer betrachtet werden.

7.1 Federpendel

Unter einem Federpendel versteht man allgemein ein aus einer Feder mit einer angehängten Masse bestehendes schwingfähiges System. Dabei liegt einem Federpendel stets das lineare Federkraft-Gesetz zugrunde, wie dies die Abb. 107 veranschaulicht.

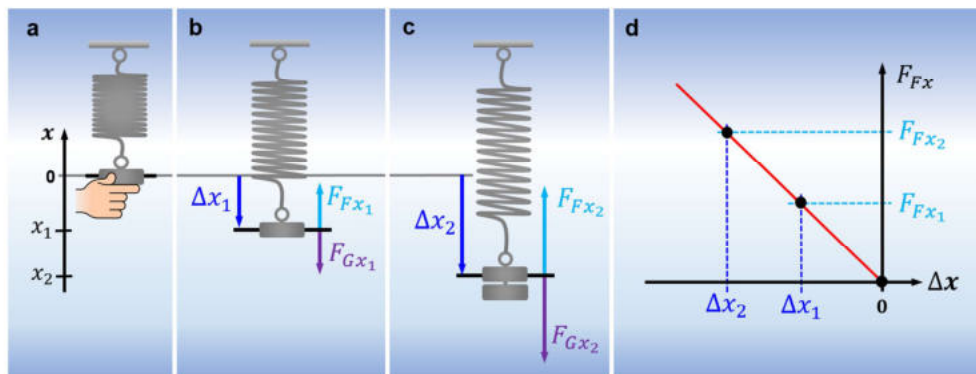


Abb. 107: Zusammenhang von Auslenkung Δx und Federkraft F_{Fx} bei einer Zugfeder

Zunächst wird in Abb. 107a ein Massenstück an die Feder gehängt und festgehalten. Dabei ist die Feder *nicht* ausgelenkt. Nun wird das Massenstück ganz vorsichtig losgelassen. Wenn das System zur Ruhe gekommen ist, wie in Abb. 107b, dann ist die Feder um Δx_1 nach unten ausgelenkt und die Federkraft F_{Fx_1} zeigt nach oben. Die Abb. 107c zeigt das zur Ruhe gekommene Feder-Masse-System nachdem ein weiteres gleichgroßes Massenstück angehängt wurde. Nun hat sich die Auslenkung auf Δx_2 verdoppelt, wodurch sich auch die Federkraft auf nun F_{Fx_2} verdoppelt hat. Hätte man eine entsprechende Messreihe aufgenommen, dann würden die Messwerte durch eine Ursprungsgerade, wie in Abb. 107d repräsentiert werden. Man sieht, dass

die Federkraft F_{F_x} proportional zur Auslenkung Δx ist: $|F_{F_x}| \sim |\Delta x|$. Die Proportionalitätskonstante wird als *Federkonstante* D bezeichnet:

$$|F_{F_x}| \sim |\Delta x| \quad \rightarrow \quad |F_{F_x}| = D \cdot |\Delta x| \quad \rightarrow \quad D = \frac{|F_{F_x}|}{|\Delta x|}$$

Natürlich entspricht die Federkonstante auch dem Betrag der Steigung der Geraden in Abb. 107d, S. 173. Da die Gerade durch den Koordinatenursprung verläuft, kann das D direkt mit nur einem Wertepaar ermittelt werden.

Federkonstante

$$D = \left| \frac{F_{F_x}}{\Delta x} \right| \quad (260)$$

Anmerkung zur Benennung der Kräfte in Abb. 107, S. 173: Da die Kräfte hier nur in x -Richtung wirken und somit $\vec{F}_G = (F_{G_x}, 0, 0)$ und $\vec{F}_F = (F_{F_x}, 0, 0)$ ist, wurden aus didaktischen Gründen gleich die wirksamen Komponenten der Kräfte angegeben. Vielleicht stellt sich in diesem Zusammenhang auch noch die Frage, warum zur Definition der Federkonstanten nicht einfach x , sondern Δx verwendet wird, obwohl es doch von den Zahlenwerten her keinen Unterschied machen würde. Da die Gerade in Abb. 107d, S. 173 durch den Ursprung verläuft, ist in diesem Fall natürlich mathematisch $\Delta x_1 = x_1$ und $\Delta x_2 = x_2$. Aber mit x werden Orte und mit Δx Ortsverschiebungen oder wie hier Auslenkungen bezeichnet. Die Bedeutsamkeit des Unterschiedes zeigt die folgende Abb. 108b, S. 175 sehr schön. Denn durch die Vorspannung der Feder ist die Federkraft beim Nulldurchgang ($x = 0$) eben nicht Null. Trägt man die Federkraft über den Ort x auf, ergibt sich zwar eine Gerade, die aber um $|\vec{F}_G|$ nach oben verschoben ist (\rightarrow Abb. 110, S. 181).

Beispiel 7.1 Eine Feder wurde durch ein Massenstück um $\Delta x = -4$ cm ausgelenkt, was eine Federkraft von $F_{F_x} = 0,96$ N hervorrief. Gesucht ist die Federkonstante D .

Mit Gl. (260) lässt sich die Federkonstante direkt berechnen:

$$D = \left| \frac{F_{F_x}}{\Delta x} \right| = \left| \frac{0,96 \text{ N}}{-0,04 \text{ m}} \right| = 24 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Der in Abb. 107d, S. 173 gezeigte lineare Zusammenhang von Δx und F_{F_x} gilt nur für den elastischen Bereich und wird Hookesches Gesetz genannt:

Hookesches Gesetz

$$F_{F_x} = -D \cdot \Delta x \quad (261)$$

Die Abb. 108d, S. 175 zeigt das Federpendel nachdem es von der Hand freigegeben wurde. Da jetzt die durch die Hand aufgebrachte Kraft \vec{F}_A weg fällt, wird das Massenstück mit $\vec{F}_{\text{res max}} = -\vec{F}_A$ von der Feder nach oben beschleunigt. Die resultierende Kraft \vec{F}_{res} ist die Federkraft \vec{F}_F abzüglich der Gewichtskraft \vec{F}_G . Durch die maximale Auslenkung des Pendels nach unten ($x = -x_0$), ergibt sich auch die maximale Federkraft $\vec{F}_{F\text{max}}$ und somit wird das Massenstück mit $\vec{F}_{\text{res max}}$ auch maximal nach oben beschleunigt:

$$\vec{F}_{\text{res max}}(-x_0) = -\vec{F}_A = - \begin{pmatrix} -D \cdot x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \cdot x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (264)$$

Dass die Feder schon vorgespannt war (\rightarrow Abb. 108b, S. 175), beeinflusst die Beschleunigung also nicht. Während das Massenstück nun nach oben beschleunigt wird, nimmt die resultierende Kraft entsprechend des Hookeschen Gesetzes immer weiter ab, die Geschwindigkeit jedoch immer weiter zu.

In Abb. 108e, S. 175 erreicht das Massenstück den Nulldurchgang ($x = 0$). Hier ist die maximale Geschwindigkeit erreicht, denn die resultierende Kraft ist null und damit ist auch die Beschleunigung null. Im Gegensatz zum Start der Bewegung (\rightarrow Abb. 108b, S. 175) bewegt sich das Massenstück jetzt infolge der Trägheit mit maximaler Geschwindigkeit über $x = 0$ hinaus weiter nach oben. Auch hier gilt die Gl. (262), S. (262). Beide Situationen lassen sich mit dem Galileischen Trägheitsprinzip erklären.

► **Exkurs** Galileisches Trägheitsprinzip (1. Newtonsches Axiom)

Wirkt auf einen Körper keine äußere resultierende Kraft, dann wird er auch nicht beschleunigt und seine Geschwindigkeit bleibt konstant.

Galileisches Trägheitsprinzip (1. Newtonsches Axiom)

$$\vec{F}_{\text{res}} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0 \rightarrow \vec{v} = \text{const.} \quad (265)$$

Damit ergeben sich nun zwei Fälle. Im ersten Fall ist und bleibt der Körper in Ruhe und seine Geschwindigkeit ist null. Im zweiten Fall bewegt er sich mit konstanter Geschwindigkeit ungleich null. Im zweiten Fall liegt dann eine gleichförmige Bewegung vor (\rightarrow Kap. 3.1.1, S. 22).

Auf dem Weg nach oben wird das Massenstück direkt nach Überschreiten des Nulldurchgangs ($0 < x < x_0$) abgebremst, denn ab hier ist die Gewichtskraft größer als die Federkraft, wodurch die resultierende Kraft nun nach unten zeigt. In Abb. 108f, S. 175 ist dann der obere Umkehrpunkt ($x = x_0$) erreicht und das Massenstück ist

$$\vec{F}_{\text{res}}(t) = \begin{pmatrix} -D \cdot x(t) - \beta \cdot \dot{x}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_{\text{res } x}(t) = -D \cdot x(t) - \beta \cdot \dot{x}(t)$$

Für die beschleunigende Kraft kann jetzt entsprechend der Newtonschen Bewegungsgleichung (\rightarrow Gl. (149), S. 92) $F_{\text{res } x}(t) = m \cdot a_x(t)$ eingesetzt werden:

$$m \cdot a_x(t) = -D \cdot x(t) - \beta \cdot \dot{x}(t)$$

Da die Beschleunigung $a_x(t)$ die 2. Zeitableitung von $x(t)$ ist, wird $a_x(t) = \ddot{x}(t)$:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -D \cdot x(t) - \beta \cdot \dot{x}(t)$$

Mit Gleichung Gl. (296) liegt nun die DGL des gedämpften Federpendels vor. Da die Dämpfung durch eine Flüssigkeit hervorgerufen wird, spricht man auch von einer viskosen Dämpfung:

DGL eines viskos gedämpften Federpendels (Gedämpfter Oszillator)

$$\ddot{x}(t) + \frac{\beta}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0 \quad (296)$$

Es handelt sich hier um eine homogene lineare gewöhnliche DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Da an dieser Stelle nicht sofort ersichtlich ist, wie die Dämpfungsfunktion genau aussieht, ist das gezielte Raten schwierig. Also wird versucht, die DGL mit dem Exponentialansatz (\rightarrow Gl. (368), S. 243) zu lösen. Dazu werden zunächst die beiden Zeitableitungen $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$ gebildet:

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (297)$$

$$\dot{x}(t) = A \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \lambda$$

$$\ddot{x}(t) = A \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \lambda^2$$

Nun werden die Gleichungen für $x(t)$, $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$ in die DGL eingesetzt:

$$\begin{aligned} \cancel{A \cdot e^{\lambda t}} \cdot \lambda^2 + \frac{\beta}{m} \cdot \cancel{A \cdot e^{\lambda t}} \cdot \lambda + \frac{D}{m} \cdot \cancel{A \cdot e^{\lambda t}} &= 0 \\ \lambda^2 + \frac{\beta}{m} \cdot \lambda + \frac{D}{m} &= 0 \end{aligned} \quad (298)$$

Die Gl. 298 wird als charakteristische Gleichung bezeichnet (\rightarrow Gl. (281), S. 183), die nun mit Hilfe der quadratischen Ergänzung gelöst wird:

$$\lambda^2 + \frac{\beta}{m} \cdot \lambda + \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 = -\frac{D}{m} + \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2$$

$$\left(\lambda + \frac{\beta}{2m}\right)^2 = -\frac{D}{m} + \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{-\frac{D}{m} + \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}$$

Durch Einsetzen von Zahlenwerten, zeigt sich, dass die Diskriminante (Ausdruck unter der Wurzel) negativ ist. Also ergibt sich für λ wieder eine komplexe Lösung:

$$\begin{aligned}\lambda_{1/2} &= -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{-1 \cdot \left(\frac{D}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2\right)} \\ &= -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} \\ &= -\underbrace{\frac{\beta}{2m}}_{\delta} \pm i \cdot \sqrt{\underbrace{\frac{D}{m}}_{\omega_0^2} - \underbrace{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}_{\delta^2}}\end{aligned}\quad (299)$$

Mit δ wird die Dämpfungs- oder Abklingkonstante bezeichnet und das Verhältnis von Federkonstante führt zur Winkelgeschwindigkeit bzw. Kreisfrequenz des ungedämpften Oszillators (\rightarrow Gl. (269), S. 178):

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm i \cdot \sqrt{\underbrace{\omega_0^2 - \delta^2}_{\omega_D^2}}\quad (300)$$

Der Term unter der Wurzel setzt sich aus der Winkelgeschwindigkeit des ungedämpften Oszillators ω_0 und der Dämpfungskonstanten δ zusammen und ist die Winkelgeschwindigkeit des gedämpften Oszillators ω_D :

Winkelgeschwindigkeit eines gedämpften Oszillators

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\quad (301)$$

Somit ergibt sich die Lösung für λ , die in den Ansatz einzusetzen ist:

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm i \cdot \omega_D\quad (302)$$

Nun wird λ in den Ansatz eingesetzt und man erhält die komplexe Lösung der DGL:

$$x(t) = A \cdot e^{(-\delta \pm i \cdot \omega_D) \cdot t} \rightarrow x(t) = A \cdot e^{(-\delta + i \cdot \omega_D) \cdot t} + B \cdot e^{(-\delta - i \cdot \omega_D) \cdot t}\quad (303)$$

Die reale Lösung ergibt sich durch Einsetzen der Eulerschen Gleichung Gl. (290), S. 186 in die komplexe Lösung:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A \cdot e^{(-\delta+i\omega_D)\cdot t} + B \cdot e^{(-\delta-i\omega_D)\cdot t} \\
 x(t) &= A \cdot e^{-\delta\cdot t+i\omega_D\cdot t} + B \cdot e^{-\delta\cdot t-i\omega_D\cdot t} \\
 x(t) &= A \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \underbrace{e^{i\omega_D\cdot t}}_{\text{Gl. (290), S. 186}} + B \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \underbrace{e^{-i\omega_D\cdot t}}_{\text{Gl. (290), S. 186}} \\
 x(t) &= A \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot [\cos(\omega_D \cdot t) + i \cdot \sin(\omega_D \cdot t)] \\
 &\quad + B \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot [\cos(\omega_D \cdot t) - i \cdot \sin(\omega_D \cdot t)] \\
 x(t) &= A \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + A \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot i \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \\
 &\quad + B \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) - B \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot i \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \\
 x(t) &= \underbrace{(A+B) \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t)}_{C_1} + i \cdot \underbrace{(A-B) \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \sin(\omega_D \cdot t)}_{C_2} \\
 x(t) &= \underbrace{C_1 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t)}_{\text{Realteil}} + i \cdot \underbrace{C_2 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \sin(\omega_D \cdot t)}_{\text{Imaginärteil}} \tag{304}
 \end{aligned}$$

Mit der Gl. (304) liegt nun die allgemeine Lösung der DGL des gedämpften Federpendels als Linearkombination vor. Dabei sind Realteil und Imaginärteil jeweils spezielle Lösungen. C_1 und C_2 sind (noch) unbestimmte, aber frei wählbare Konstanten.

Setzt man in Gl. (304) für $C_1 = -x_0$ ein, dann beschreibt der Realteil die Bewegung des Massenstückes des viskos gedämpften Federpendels im Schwingungsfall:

$$x(t) = -x_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot e^{-\delta\cdot t} \tag{305}$$

Nun wird überprüft, ob die mit Gl. (305) gefundene Lösung die DGL (296), S. 190 auch wirklich erfüllt. Dazu wird mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel zunächst die erste Zeitableitung $\dot{x}(t)$ gebildet:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= -x_0 \cdot (-\sin(\omega_D \cdot t)) \cdot \omega_D \cdot e^{-\delta\cdot t} - x_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot (-\delta) \\
 &= x_0 \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D \cdot e^{-\delta\cdot t} + x_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \delta \\
 \dot{x}(t) &= x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot [\sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D + \cos(\omega_D \cdot t) \cdot \delta] \tag{306}
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Produkt-, Summen- und Kettenregel kann jetzt die zweite Zeitableitung $\ddot{x}(t)$ gebildet werden:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}(t) &= x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot (-\delta) \cdot [\sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D + \cos(\omega_D \cdot t) \cdot \delta] \\
 &\quad + x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot [\cos(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D^2 - \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D \cdot \delta] \\
 \ddot{x}(t) &= -x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \delta \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D - x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot \delta^2 \\
 &\quad + x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D^2 - x_0 \cdot e^{-\delta\cdot t} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \omega_D \cdot \delta
 \end{aligned}$$

Mit ω_0 und δ ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit des gedämpften Federpendels ω_D :

$$\omega_D = \sqrt{\left(22,36 \frac{1}{s}\right)^2 - \left(1,18 \frac{1}{s}\right)^2} = 22,33 \frac{1}{s}$$

Bei gedämpften Schwingungen ist die Winkelgeschwindigkeit ω_D im Schwingungsfall immer kleiner, als sie es ohne Dämpfung mit ω_0 wäre: $\omega_D < \omega_0$

Durch Einsetzen von δ , ω_0 und ω_D in Gl. (309), S. 196 ergibt sich die Ort-Zeit-Funktionsgleichung des viskos gedämpften Federpendels:

$$x(t) = -0,02 \text{ m} \cdot \cos\left(22,33 \frac{1}{s} \cdot t\right) \cdot e^{-1,18 \frac{1}{s} \cdot t}$$

Die Abb. 120 zeigt den zeitlichen Verlauf der kleinen Kugel während sie in Öl schwingt:

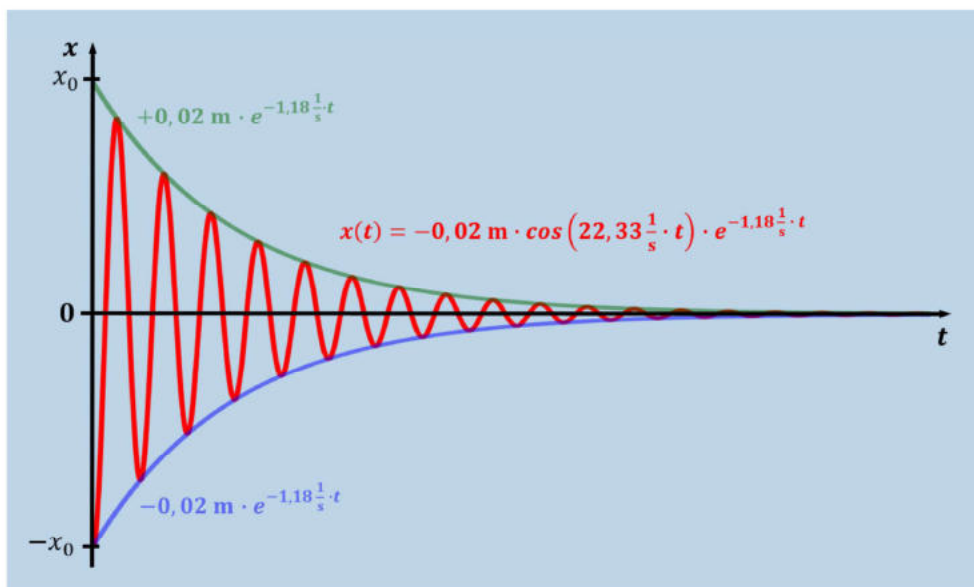


Abb. 120: Ort-Zeit-Diagramm eines viskos gedämpften Federpendels

Dabei folgt die Abnahme der Amplitude einer Exponentialfunktion, wie dies auch die beiden Hüllfunktionen zeigen. Abschließend wird noch die Schwingungsdauer T berechnet:

$$\omega_D = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{22,33 \frac{1}{s}} = 0,28 \text{ s}$$

7.3.1 Abklingverhalten bei viskos gedämpften Oszillatoren

Betrachtet man die Gleichung der Winkelgeschwindigkeit des gedämpften Oszillators Gl. (301), S. 191, dann ergeben sich für die Diskriminante drei Fälle:

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \rightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \delta^2) > 0 & \text{Schwingungsfall} \\ (\omega_0^2 - \delta^2) = 0 & \text{Aperiodischer Grenzfall} \\ (\omega_0^2 - \delta^2) < 0 & \text{Kriechfall} \end{cases} \quad (308)$$

7.3.1.1 Schwingungsfall

Im Schwingungsfall ist die Diskriminante mit $\omega_0^2 > \delta^2$ größer als null und somit kann die Wurzel berechnet werden. Dieser Fall lässt sich mit dem Realteil der komplexen Lösung beschreiben (\rightarrow Gl. (309), S. 196):

Ort-Zeit-Funktion des viskos gedämpften Federpendels (Schwingungsfall)

$$x(t) = -x_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t\right) \cdot e^{-\delta \cdot t} = -x_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t} \quad (309)$$

7.3.1.2 Aperiodischer Grenzfall

Von aperiodischem Grenzfall spricht man dann, wenn ω_0^2 und δ^2 mit $\omega_0^2 = \delta^2$ gleich groß sind. Damit wird die Diskriminante und damit auch das Argument des Kosinuses null (\rightarrow Gl. (301), S. 191):

$$x(t) = -x_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \cdot e^{-\delta \cdot t} = -x_0 \cdot \underbrace{\cos\left(\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t}_0\right)}_1 \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

Ort-Zeit-Funktion des viskos gedämpften Federpendels (aperoid. Grenzfall)

$$x(t) = -x_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \quad (310)$$

Durch den nur noch exponentiellen Verlauf der $x(t)$ -Funktion finden hier keine Schwingungen im eigentlichen Sinne mehr statt. Aperiodische Dämpfungen werden in der Praxis dann eingesetzt, wenn Systeme schnellstmöglich gegen null laufen sollen.