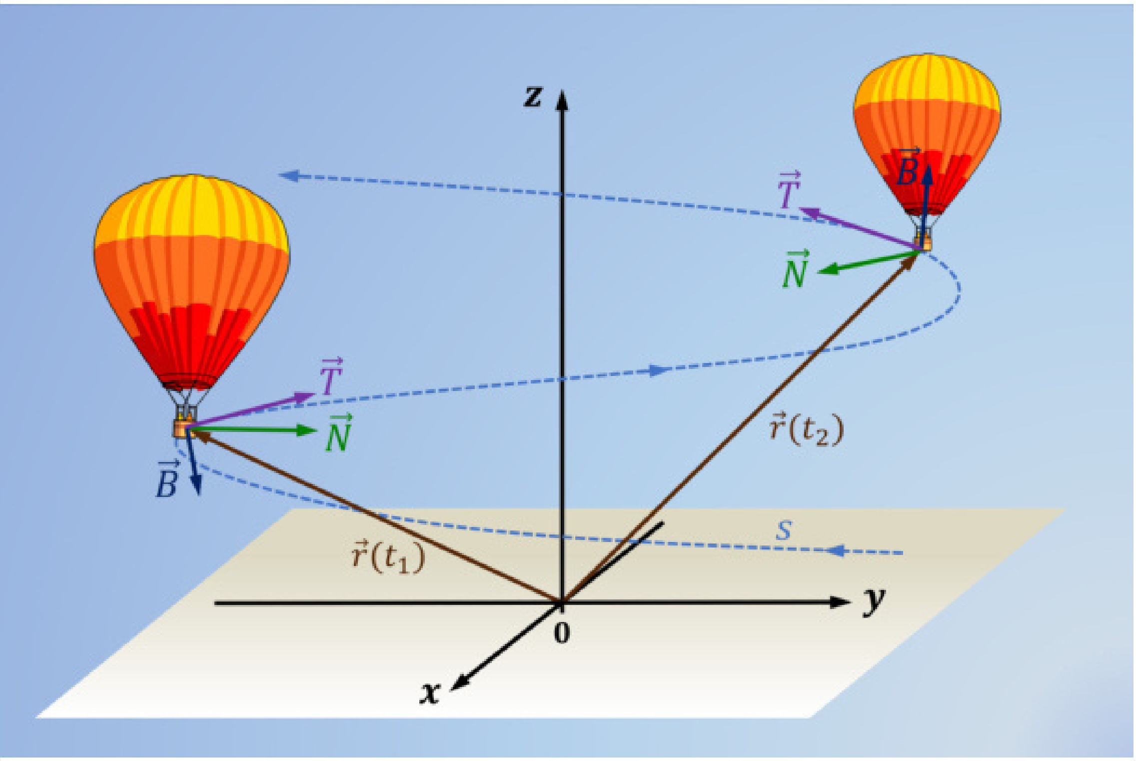
Thomas Amenda

Elemente der Kinematik

Zwischen Oberstufe und Grundstudium



2. Auflage

Lehrbuch

BoD

Inhaltsverzeichnis

3 Translationsbewegungen

In diesem Kapitel werden zunächst die Translationsbewegungen und ihre charakteristischen Beschreibungsgrößen wie Ort, Ortsverschiebung, Weg, Geschwindigkeit, Tempo und Beschleunigung vorgestellt. Es werden hier aber auch die für Rotationsbewegungen typischen Beschreibungsgrößen wie Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung verwendet, die sich für Kurvenfahrten besonders gut eignen.

Grundsätzlich bewegt sich ein Körper, wenn er seinen Ort in einem bestimmten Zeitintervall ändert. Da die Geschwindigkeit eben diese Ortsänderung und das benötigte Zeitintervall verknüpft, hat sie in der Kinematik eine große Bedeutung. Einführend soll zunächst die Momentangeschwindigkeit betrachtet und definiert werden.

Die Momentangeschwindigkeit $\vec{v}(t)$ setzt sich aus einem Betrag und einer Richtung zusammen. Der Geschwindigkeitsbetrag $|\vec{v}(t)|$ ist das Tempo oder die Schnelligkeit, das der Fahrer als „Tachowert“ ablesen kann. Die Richtung wird hier als Einheitsvektor in Richtung der Geschwindigkeit $\vec{e}_v(t)$ angegeben (→ Kap. 2.1.2, S. 7):

Momentangeschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}(t) = |\vec{v}(t)| \cdot \vec{e}_v(t) \tag{19}$$

Entsprechend Gleichung (19) können sowohl das Tempo $|\vec{v}(t)|$ als auch die Richtung $\vec{e}_v(t)$ des Geschwindigkeitsvektors zu jedem Zeitpunkt t einen anderen Wert annehmen. Die sich so ergebenden vier möglichen Bewegungstypen A, B, C und D werden im folgenden Abschnitt am Beispiel zweidimensionaler Auto-Bewegungen vorgestellt.

3.1 Bewegungstypen

Alle Bewegungen makroskopischer Körper, sogar einschließlich Rotationen und Schwingungen, lassen sich grundsätzlich einer der vier folgenden Bewegungstypen - in diesem Buch als Typ A bis Typ D bezeichnet - zuordnen:

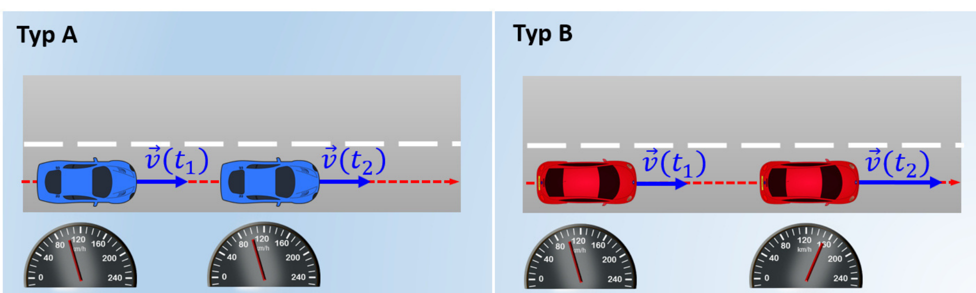


Abb. 15: Typ A und B: Geradlinige Bewegungen ohne (A) und mit (B) Tempoänderung

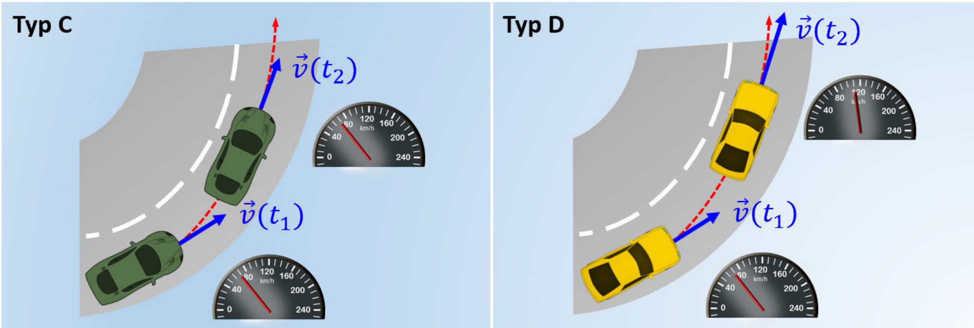


Abb. 16: Typ C und D: Nicht geradlinige Bewegungen ohne (C) und mit (D) Tempoänderung

In den folgenden Abschnitten werden diese vier Typen am Beispiel von Autobewegungen detailliert vorgestellt und alle notwendigen Gleichungen hergeleitet.

3.1.1 Typ A: Geradlinige Bewegung mit konstantem Tempo

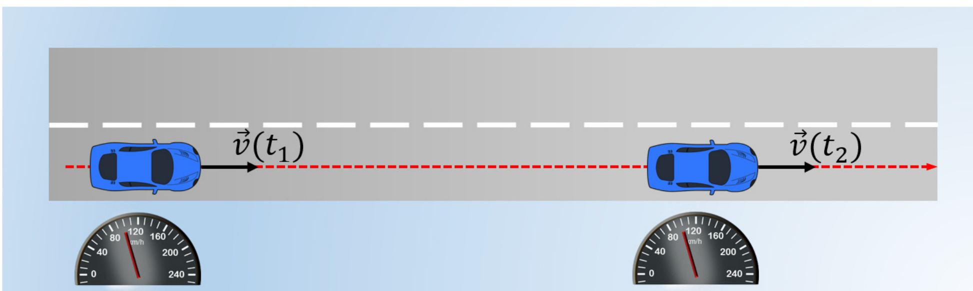


Abb. 17: Typ A: Geradlinige Bewegung mit konstantem Tempo

Die Abb. 17 zeigt ein Auto, das sich geradlinig mit konstantem Tempo bewegt. Dieser Sonderfall wird auch als *gleichförmige Bewegung* bezeichnet. Eine Bewegung ist dann gleichförmig, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- **Typ A:** $\vec{e}_v(t_1, t_2) = \text{const.}$ und $|\vec{v}(t_1, t_2)| = \text{const.}$

Richtung und Betrag (Tempo) des Geschwindigkeitsvektors ändern sich im Zeitintervall von t_1 bis t_2 nicht, sodass $\vec{v}(t_1, t_2) = \text{const.}$ ist. Gleichförmige Bewegungen sind in der Regel die am einfachsten zu behandelnden Bewegung, da sich die kinematischen Beschreibungsgleichungen sehr einfach herleiten lassen.

3.1.2 Typ B: Geradlinige Bewegung mit Tempoänderung

Auch Abb. 18, S. 23 zeigt ein Auto, das sich geradlinig bewegt. Im Gegensatz zu Typ A ändert das Auto hier jedoch sein Tempo, es wird schneller. Die Tempozunahme wird durch die Länge des Vektorpfeils veranschaulicht. Da sich hier ein Teil des Geschwindigkeitsvektors ändert, handelt es sich hier auch um eine beschleunigte Bewegung.

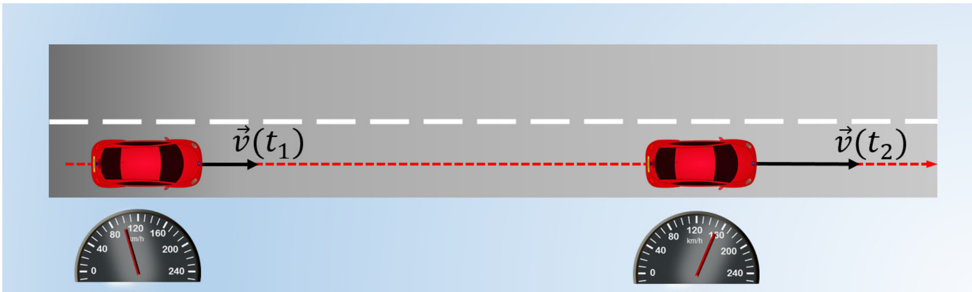


Abb. 18: Typ B: Geradlinige Bewegung mit Tempoänderung

Eine geradlinig beschleunigte Bewegung liegt dann vor, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- **Typ B:** $\vec{e}_v(t_1, t_2) = \text{const.}$ und $|\vec{v}(t_1, t_2)| \neq \text{const.}$
  - Tempozunahme: $|\vec{v}(t_1)| < |\vec{v}(t_2)|$
  - Tempoabnahme: $|\vec{v}(t_1)| > |\vec{v}(t_2)|$

Für die Tempoänderung ergeben sich nun zwei Möglichkeiten: die *Tempozunahme* und die *Tempoabnahme*. Die Verwendung dieser Begriffe hat den Vorteil koordinatenunabhängig zu sein, da das Tempo ein Skalar ist. In der Literatur wird die Tempo*zu*nahme oft als *Beschleunigung* und die Tempo*ab*nahme als *Verzögerung* bezeichnet.

3.1.3 Typ C: Nicht geradlinige Bewegung mit konstantem Tempo

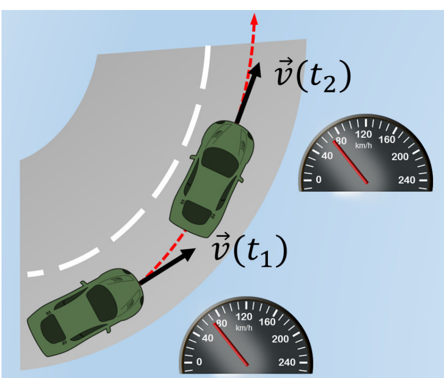


Abb. 19: Typ C: Nicht geradlinige Bewegung mit konstantem Tempo

Die Abb. 19 zeigt ein Auto in einer Kurvenfahrt mit konstantem Tempo. Hier ändert sich nur die Richtung der Geschwindigkeit, wie an der Spitze des Vektorpfeils zu erkennen ist.
Da sich hier ein Teil des Geschwindigkeitsvektors ändert, handelt es sich hier auch um eine beschleunigte Bewegung. Hier zeigt sich, dass Kreisbewegungen immer auch beschleunigte Bewegungen sind, da die Richtung der Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt eine andere ist. Während der Kurvenfahrt im Zeitintervall von t_1 bis t_2, befindet sich das Auto auch in einer Kreisbewegung. Für nicht geradlinige

Bewegungen mit konstantem Tempo gilt dann:

- **Typ C:** $\vec{e}_v(t_1, t_2) \neq \text{const.}$ und $|\vec{v}(t_1, t_2)| = \text{const.}$

3.1.4 Typ D: Nicht geradlinige Bewegung mit Tempoänderung

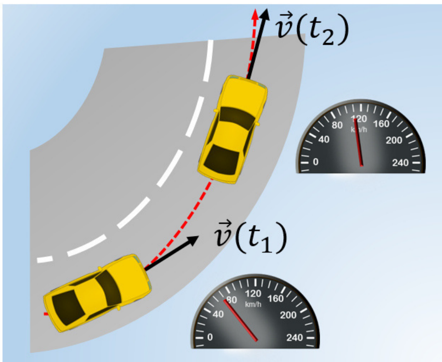


Abb. 20: Typ D: Nicht geradlinige Bewegung mit Tempoänderung

Bei dem letzten der vier möglichen Fälle von Translationsbewegungen ändern sich mit der Richtung und dem Tempo beide Teile des Geschwindigkeitsvektors. Die in Abb. 20 dargestellte Kurvenfahrt eines Autos zeigt eine solche Bewegung. Dass sich beide Teile der Geschwindigkeit ändern, wird durch Lage der Pfeilspitze und durch die Änderung der Pfeillänge veranschaulicht.

Natürlich liegt auch hier eine beschleunigte Bewegung vor. Im Gegensatz zu Typ C setzt sich hier aber, der später noch ausführlich vorgestellte Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t)$ aus zwei Anteilen zusammen: einem radialen und einem tangentialen. Dabei bewirkt die immer zum Mittelpunkt des jeweiligen Krümmungskreises zeigende Radialbeschleunigung eine Richtungsänderung der Geschwindigkeit. Die immer in Pfeilrichtung der Geschwindigkeit zeigende Tangentialbeschleunigung sorgt für die Tempoänderung. Unter folgenden Bedingungen liegt eine nicht geradlinige Bewegung mit Tempoänderung vor:

- **Typ D:** $\vec{e}_v(t_1, t_2) \neq \text{const.}$ und $|\vec{v}(t_1, t_2)| \neq \text{const.}$
  - Tempozunahme: $|\vec{v}(t_1)| < |\vec{v}(t_2)|$
  - Tempoabnahme: $|\vec{v}(t_1)| > |\vec{v}(t_2)|$

In diesem Abschnitt wurden mit der Geschwindigkeit und dem Tempo schon zwei für Translationsbewegungen charakteristische Größen qualitativ verwendet. Im folgenden Abschnitt werden nun weitere kinematische Beschreibungsgrößen vorgestellt und definiert.

3.2 Beschreibungsgrößen

Die im Rahmen dieses Buches verwendete Darstellung der Kinematik unterscheidet konsequent zwischen skalaren und vektoriellen Größen einerseits und zwischen Momentan- und Durchschnittswerten andererseits. Dadurch lässt sich die Kinematik anschaulich und vor allem konsistent darstellen.

zunächst ein wenig befremdlich klingen, lässt sich aber doch mit einem entsprechend großen Radius des aktuellen Krümmungskreises verständlich machen.

Natürlich sind solch genauen, vielleicht auch als spitzfindig empfundenen, Betrachtungen in vielen praktischen Fällen sicher nicht notwendig. Trotzdem müssen sie im Rahmen einer konsistenten Beschreibung von Bewegungen wenigstens bekannt sein.

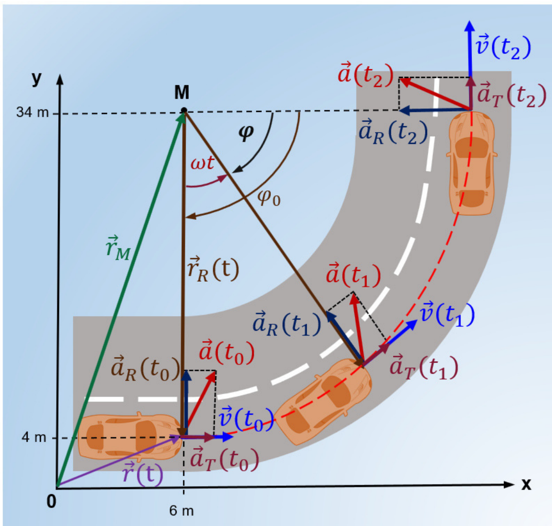


Abb. 45: Momentanbeschleunigung bei einer Kurvenfahrt mit Tempozunahme

Beispiel 3.12 Die Abb. 45 zeigt ein Auto, das während der kreisförmigen Kurvenfahrt sein Tempo gleichmäßig von 9 m/s auf 12 m/s erhöht. Das Auto fährt zum Zeitpunkt t_0 in die Kurve ein und verlässt die Kurve zum Zeitpunkt $t_2 = 3,2$ s wieder.
Gesucht ist die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t_1 = 2$ s, separiert nach Tangential- und Radialanteil. Abschießend soll gezeigt werden, dass die Tangentialbeschleunigung zum Zeitpunkt $t_1 = 2$ s parallel und die Radialbeschleunigung senkrecht zur Geschwindigkeit steht.
Zuerst wird die Winkelgeschwindigkeit zu den Zeitpunkten t_0 und t_2 angegeben:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \;\rightarrow\; |\vec{v}(t)| = |\vec{\omega}(t)| \cdot |\vec{r}(t)| \cdot \sin(\alpha) \quad \text{mit: } \sin(90°) = 1 \;\rightarrow$$

$$|\vec{\omega}(t)| = \frac{|\vec{v}(t)|}{|\vec{r}(t)|} \;\rightarrow\; |\vec{\omega}(0\text{ s})| = \frac{|\vec{v}(0\text{ s})|}{|\vec{r}_R(0\text{ s})|} = \frac{9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{30\text{ m}} = 0,3\ \frac{1}{\text{s}}$$

$$|\vec{\omega}(t)| = \frac{|\vec{v}(t)|}{|\vec{r}(t)|} \;\rightarrow\; |\vec{\omega}(3,2\text{ s})| = \frac{|\vec{v}(3,2\text{ s})|}{|\vec{r}_R(3,2\text{ s})|} = \frac{12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{30\text{ m}} = 0,4\ \frac{1}{\text{s}}$$

Die Winkelgeschwindigkeit kann direkt angegeben werden, da sie senkrecht auf der Blattebene steht und somit nur eine z-Komponente hat:

$$\vec{w}(0\text{ s}) = \vec{\omega}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}}, \quad \vec{w}(3,2\text{ s}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,4 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}}$$

Somit ergibt sich die konstante Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}(t)$ für die Kurvenfahrt:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot (\vec{\omega}(3,2\text{ s}) - \vec{\omega}(0\text{ s}))$$

$$= \frac{1}{3,2\ \text{s}} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,4 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,03125 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}^2} \tag{80}$$

Jetzt muss die Ortsfunktion $\vec{r}_R(t)$ für die Kurvenfahrt aufgestellt werden, wobei der Fußpunkt des Ortsvektors $\vec{r}_R(t)$ im Kreismittelpunkt M liegt:

$$\vec{r}_R(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi(t)) \\ R \cdot \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{r}_R| \cdot \cos(\varphi(t)) \\ |\vec{r}_R| \cdot \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{81}$$

Im Gegensatz zum Beispiel 3.11 ($\rightarrow$ Gl. (48), S. 55) ist hier ja die Winkelgeschwindigkeit nicht mehr konstant, sondern nimmt gleichmäßig zu. Somit ist die Gleichung des Winkels $\varphi(t)$ um den Term der Winkelbeschleunigung $1/2 \cdot \alpha \cdot t^2$ zu erweitern:

$$\varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \varphi_0 \quad \text{mit} \quad |\vec{\alpha}| > 0 \quad \rightarrow \quad \varphi(t) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0 \quad \rightarrow$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \cdot 0,03125\ \frac{1}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 0,3\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{2} \tag{82}$$

Durch Einsetzen von Gl. (82) in Gl. (81) wird der Vektor $\vec{r}_R(2\ \text{s})$ errechnet:

$$\vec{r}_R(t) = \begin{pmatrix} 30\ \text{m} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot 0,03125\ \frac{1}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 0,3\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ 30\ \text{m} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 0,03125\ \frac{1}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 0,3\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_R(2\ \text{s}) = \begin{pmatrix} 30\ \text{m} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot 0,03125\ \frac{1}{\text{s}^2} \cdot (2\ \text{s})^2 + 0,3\ \frac{1}{\text{s}} \cdot 2\ \text{s} - \frac{\pi}{2}\right) \\ 30\ \text{m} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 0,03125\ \frac{1}{\text{s}^2} \cdot (2\ \text{s})^2 + 0,3\ \frac{1}{\text{s}} \cdot 2\ \text{s} - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 18,45 \\ -23,65 \\ 0 \end{pmatrix}\ \text{m} \tag{83}$$

Nun wird die Winkelgeschwindigkeit mit Gl. (80) für $t_1 = 2$ s berechnet:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \Delta\vec{\omega} = \vec{\alpha}(t) \cdot \Delta t \quad \rightarrow \quad \underbrace{\vec{\omega}(2\ \text{s}) - \vec{\omega}(0\ \text{s})}_{\Delta\vec{\omega}(2\ \text{s})} = \vec{\alpha}(2\ \text{s}) \cdot \underbrace{(2\ \text{s} - 0\ \text{s})}_{\Delta t} \quad \rightarrow$$

$$\vec{\omega}(2\ \text{s}) = \underbrace{\vec{\alpha}(2\ \text{s}) \cdot 2\ \text{s}}_{\Delta\vec{\omega}(2\ \text{s})} + \vec{\omega}(0\ \text{s}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,03125 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}^2} \cdot 2\ \text{s} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3625 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}} \tag{84}$$

Die Beschleunigung bei Kreisbewegungen $\vec{a}(t)$ ergibt sich mit Gl. (75), S. 64:

$$\vec{a}(t) = \underbrace{\vec{\alpha}(t) \times \vec{r}(t)}_{\vec{a}_T(t)} + \underbrace{\vec{\omega}(t) \times \underbrace{(\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t))}_{\vec{v}(t)}}_{\vec{a}_R(t)}$$

Zur Berechnung der Radialbeschleunigung $\vec{a}_R(2\text{ s})$ wird zunächst das erste Vektorprodukt durch Einsetzen von Gl. (83) und Gl. (84), S. 68 in Gl. (75), S. 64 berechnet. Dazu wird das Vektorprodukt wieder als Determinante dargestellt und mit der Regel von Sarrus gelöst ($\rightarrow$ Beispiel 2.5, S. 13):

$$\begin{aligned}
\vec{v}(2\text{ s}) = \vec{\omega}(2\text{ s}) \times \vec{r}_R(2\text{ s}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3625 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}} \times \begin{pmatrix} 18,45 \\ -23,65 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \\
&= \left| \begin{matrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 0,3625\ \frac{1}{\text{s}} \\ 18,45\text{ m} & -23,65\text{ m} & 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ 0 & 0 \\ 18,45\text{ m} & -23,65\text{ m} \end{matrix} \\
&= 0,3625\ \frac{1}{\text{s}} \cdot 18,45\text{ m} \cdot \vec{e}_y + 23,65\text{ m} \cdot 0,3625\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \vec{e}_x \\
&= \begin{pmatrix} 8,57 \\ 6,69 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

Mit dem zweiten Vektorprodukt ergibt sich dann die Radialbeschleunigung $\vec{a}_R(2\text{ s})$:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_R(2\text{ s}) = \vec{\omega}(2\text{ s}) \times \vec{v}(2\text{ s}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3625 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}} \times \begin{pmatrix} 8,57 \\ 6,69 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
&= \left| \begin{matrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 0,3625\ \frac{1}{\text{s}} \\ 8,57\ \frac{\text{m}}{\text{s}} & 6,69\frac{\text{m}}{\text{s}} & 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ 0 & 0 \\ 8,57\ \frac{\text{m}}{\text{s}} & 6,69\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{matrix} \\
&= 0,3625\ \frac{1}{\text{s}} \cdot 8,57\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \vec{e}_y - 6,69\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,3625\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \vec{e}_x \\
&= \begin{pmatrix} -2,42 \\ 3,11 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}
\end{aligned}$$

Nun kann die Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_R(2\text{ s})$ berechnet werden:

$$\vec{a}_T(t) = \vec{\alpha}(2\text{ s}) \times \vec{r}_R(2\text{ s}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,03125 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}^2} \times \begin{pmatrix} 18,45 \\ -23,65 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

7 Schwingungen

Bewegungen bei denen Körper periodisch zwischen zwei Orten hin und her pendeln, lassen sich ganz allgemein als Schwingungen bezeichnen. Charakteristisch für Schwingungen ist u.a., dass der schwingende Körper an den beiden zuletzt erreichten Orten zur Ruhe kommt und dann seine Bewegungsrichtung umkehrt. Somit sind Schwingungen auch immer Bewegungen mit *nicht* konstanter Beschleunigung. Das in Abb. 105, S. 170 behandelte ebene Pendel führt genau so eine Bewegung aus. Die dem ebenen Pendel zugrunde liegende DGL (251), S. 168 wurde im Rahmen des Lagrange-Formalismuses bereits entwickelt und die kinematischen Bewegungsgleichungen hergeleitet. Da Schwingungen nicht nur in der Physik von großer Bedeutung sind, sollen sie in diesem Kapitel etwas genauer betrachtet werden.

7.1 Federpendel

Unter einem Federpendel versteht man allgemein ein aus einer Feder mit einer angehängten Masse bestehendes schwingfähiges System. Dabei liegt einem Federpendel stets das lineare Federkraft-Gesetz zugrunde, wie dies die Abb. 107 veranschaulicht.

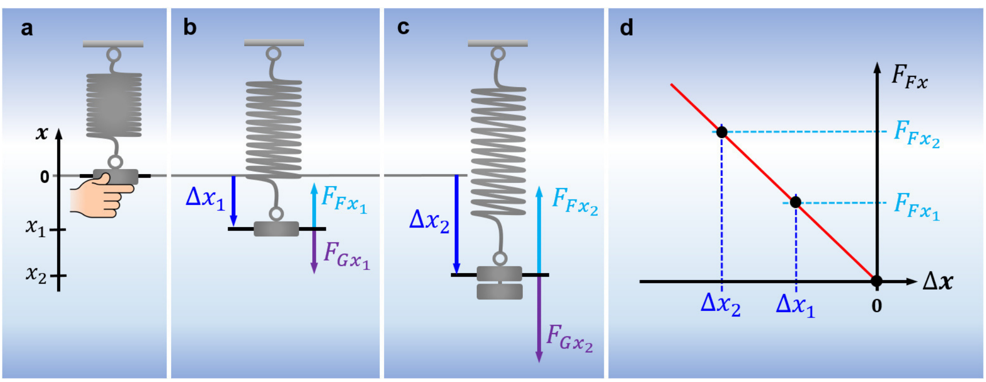


Abb. 107: Zusammenhang von Auslenkung Δx und Federkraft F_{F_x} bei einer Zugfeder

Zunächst wird in Abb. 107a ein Massenstück an die Feder gehängt und festgehalten. Dabei ist die Feder *nicht* ausgelenkt. Nun wird das Massenstück ganz vorsichtig losgelassen. Wenn das System zur Ruhe gekommen ist, wie in Abb. 107b, dann ist die Feder um Δx_1 nach unten ausgelenkt und die Federkraft $F_{F_{x_1}}$ zeigt nach oben. Die Abb. 107c zeigt das zur Ruhe gekommene Feder-Masse-System nachdem ein weiteres gleichgroßes Massenstück angehängt wurde. Nun hat sich die Auslenkung auf Δx_2 verdoppelt, wodurch sich auch die Federkraft auf nun $F_{F_{x_2}}$ verdoppelt hat.
Hätte man eine entsprechende Messreihe aufgenommen, dann würden die Messwerte durch eine Ursprungsgerade, wie in Abb. 107d repräsentiert werden. Man sieht, dass

die Federkraft F_{F_x} proportional zur Auslenkung Δx ist: $|F_{F_x}| \sim |\Delta x|$. Die Proportionalitätskonstante wird als *Federkonstante* D bezeichnet:

$$|F_{F_x}| \sim |\Delta x| \quad \rightarrow \quad |F_{F_x}| = D \cdot |\Delta x| \quad \rightarrow \quad D = \frac{|F_{F_x}|}{|\Delta x|}$$

Natürlich entspricht die Federkonstante auch dem Betrag der Steigung der Geraden in Abb. 107d, S. 173. Da die Gerade durch den Koordinatenursprung verläuft, kann das D direkt mit nur einem Wertepaar ermittelt werden.

Federkonstante

$$D = \left| \frac{F_{F_x}}{\Delta x} \right| \tag{260}$$

Anmerkung zur Benennung der Kräfte in Abb. 107, S. 173: Da die Kräfte hier nur in x-Richtung wirken und somit $\vec{F}_G = (F_{G_x}, 0, 0)$ und $\vec{F}_F = (F_{F_x}, 0, 0)$ ist, wurden aus didaktischen Gründen gleich die wirksamen Komponenten der Kräfte angegeben. Vielleicht stellt sich in diesem Zusammenhang auch noch die Frage, warum zur Definition der Federkonstanten nicht einfach x, sondern Δx verwendet wird, obwohl es doch von den Zahlenwerten her keinen Unterschied machen würde. Da die Gerade in Abb. 107d, S. 173 durch den Ursprung verläuft, ist in diesem Fall natürlich mathematisch $\Delta x_1 = x_1$ und $\Delta x_2 = x_2$. Aber mit x werden Orte und mit Δx Ortsverschiebungen oder wie hier Auslenkungen bezeichnet. Die Bedeutsamkeit des Unterschiedes zeigt die folgende Abb. 108b, S. 175 sehr schön. Denn durch die Vorspannung der Feder ist die Federkraft beim Nulldurchgang ($x = 0$) eben nicht Null. Trägt man die Federkraft über den Ort x auf, ergibt sich zwar eine Gerade, die aber um $|\vec{F}_G|$ nach oben verschoben ist (→ Abb. 110, S. 181).

Beispiel 7.1 Eine Feder wurde durch ein Massenstück um $\Delta x = -4$ cm ausgelenkt, was eine Federkraft von $F_{F_x} = 0{,}96$ N hervorrief. Gesucht ist die Federkonstante D.

Mit Gl. (260) lässt sich die Federkonstante direkt berechnen:

$$D = \left| \frac{F_{F_x}}{\Delta x} \right| = \left| \frac{0{,}96 \text{ N}}{-0{,}04 \text{ m}} \right| = 24 \ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Der in Abb. 107d, S. 173 gezeigte lineare Zusammenhang von Δx und F_{F_x} gilt nur für den elastischen Bereich und wird Hookesches Gesetz genannt:

Hookesches Gesetz

$$F_{F_x} = -D \cdot \Delta x \tag{261}$$

Das bislang als ruhend betrachtete Feder-Masse-System soll nun zum Schwingen angeregt werden. Mit Hilfe der folgenden Abb. 108 wird die Differentialgleichung (DGL) für das Federpendel schrittweise entwickelt, indem die notwendigen Kräftegleichungen mittels Polygonzug (→ Kap. 2.2.2, S. 10) aufgestellt werden.

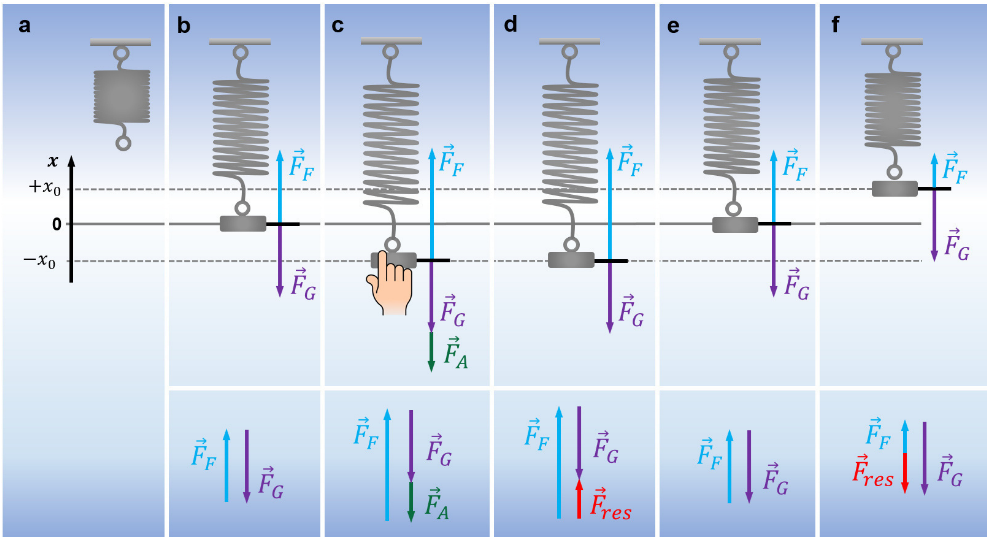


Abb. 108: Kräfte am ungedämpften Federpendel

Die Abb. 108a zeigt die unbelastete Feder. Durch Anhängen eines Massenstückes, wie in Abb. 108b zu sehen, wird die Feder vorgespannt und befindet sich nun am Ort $x = 0$. Da $\vec{F}_F$ und $\vec{F}_G$ gleichgroß, aber entgegen gerichtet sind, wirkt *keine* resultierende Kraft auf das Massenstück. Mit $\vec{F}_{\text{res}} = 0$ wird das Massenstück auch nicht beschleunigt:

$$\vec{F}_F(x=0) = -\vec{F}_G = -\begin{pmatrix} -m \cdot g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{262}$$

Das Federpendel wird in Abb. 108c nach unten ausgelenkt und festgehalten. Durch die von der Hand aufgebrachte Kraft $\vec{F}_A = (-D \cdot x_0, 0, 0)$, die jedoch kleiner als $\vec{F}_G$ ist, erhält die Feder ihre größte Auslenkung und das Massenstück befindet sich jetzt am tiefsten Punkt bei $x = -x_0$. Solange die Feder noch festgehalten wird, ist die Federkraft maximal und die resultierende Kraft null. Das Massenstück wird (noch) nicht beschleunigt. So lässt sich für die Federkraft am *unteren* Umkehrpunkt mit $\vec{F}_{F\max}(-x_0) = -\vec{F}_G - \vec{F}_A$ folgende Gleichung angeben:

$$\vec{F}_{F\max}(-x_0) = -\begin{pmatrix} -m \cdot g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -D \cdot x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot g + D \cdot x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{263}$$

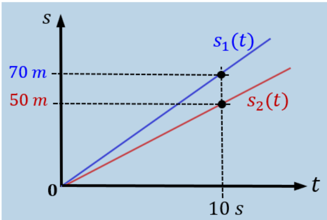


Abb. 126: Weg-Zeit-Diagramme

Die Abb. 126 zeigt die Weg-Zeit-Diagramme für die beiden Radfahrer für den ersten Teil der Aufgabe. Damit Weg-Zeit-Diagramme den jeweils zum Zeitpunkt t zurückgelegten Weg s angeben, müssen Weg-Zeit-Funktionen im Koordinatenursprung mit $s(t_0) = 0$ beginnen. Da hier beide Radfahrer mit konstantem Tempo $u(t) = |\vec{v}(t)|$ unterwegs waren, lassen sich die $s(t)$-Gleichungen direkt angeben:

$$s_1(t) = u_1 \cdot t \quad \rightarrow \quad s_1(t) = 7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t \quad \rightarrow \quad s_1(10\ \mathrm{s}) = 7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10\ \mathrm{s} = 70\ \mathrm{m}$$
$$s_2(t) = u_2 \cdot t \quad \rightarrow \quad s_2(t) = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t \quad \rightarrow \quad s_2(10\ \mathrm{s}) = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10\ \mathrm{s} = 50\ \mathrm{m}$$

Weg-Zeit-Diagramme lassen grundsätzlich keinerlei Rückschlüsse auf die Bahnkurven der Bewegungen zu. So ergäben sich z.B. die gleichen Weg-Zeit-Diagramme, wie in Abb. 126 auch für Autos, die sich mit konstantem Tempo (Tachowert) im Kreis bewegen würden. Weg-Zeit-Diagramme liefern aber Angaben zum Momentantempo, das der Steigung $u(t) = ds/dt$ der $s(t)$-Funktion entspricht. Die hier vorliegenden Geraden zeigen, dass die beiden Radfahrer mit konstantem Tempo unterwegs waren und das Radfahrer 1 schneller als Radfahrer 2 war, mehr aber auch nicht.

8.3 Der senkrecht nach oben geschossene Ball

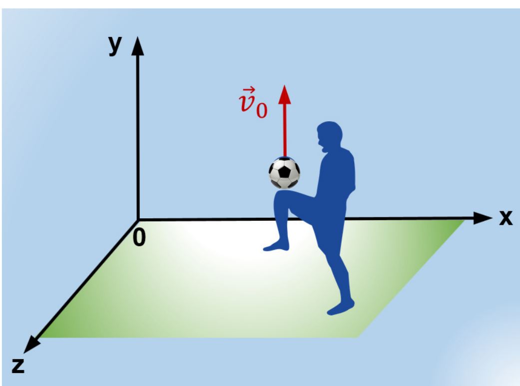


Abb. 127: Schuss nach oben

Ein Fußballspieler schießt den Ball mit dem Knie senkrecht nach oben und erteilt ihm so eine Geschwindigkeit von $\vec{v}_0 = (0, 6, 0)$ m/s.
Die Betrachtung der Bewegung beginnt zum Zeitpunkt t_0, nach dem der Ball keinen Kontakt mehr zum Knie des Fußballers hat und endet zum Zeitpunkt t_e mit dem Auftreffen des Balles auf dem Rasen.
Für diese beiden Zeitpunkte sind die Ortsvektoren mit $\vec{r}_0 = (8, 1, 3)$ m und $\vec{r}(t_e) = (8, 0, 3)$ m bekannt. Unter Vernachlässigung der Luftreibung, soll diese Bewegung idealisiert als vertikaler Wurf nach oben betrachtet werden.

Gesucht sind zunächst die Ort-Zeit-, Geschwindigkeit-Zeit- und die Beschleunigung-Zeit-Funktionsgleichungen. Von Interesse ist weiterhin der Zeitpunkt der maximalen Höhe, die maximale Höhe selber, der Zeitpunkt an dem der Ball wieder den Rasen erreicht sowie der vom Ball zurückgelegte Weg und das Weg-Zeit-Diagramm.

Um die kinematischen Funktionsgleichungen aufstellen zu können, wird die Bewegung des Balles zu verschiedenen Zeitpunkten betrachtet und die jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren eingezeichnet, wie dies in Abb. 128 dargestellt wird.

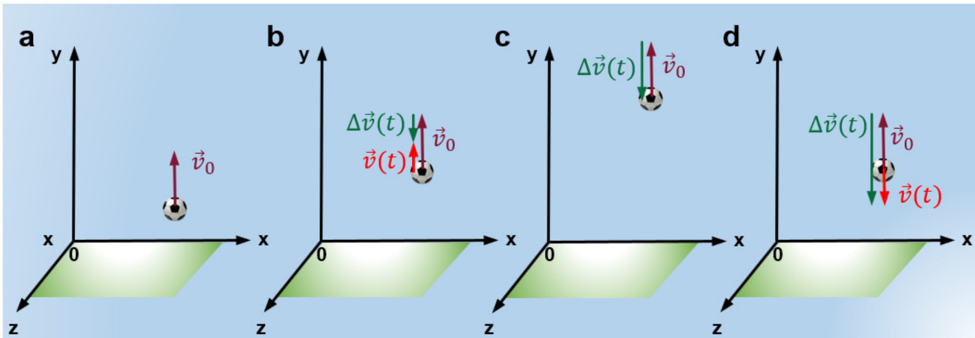


Abb. 128: Geschwindigkeitsvektoren eines nach oben geschossenen Fußballs

Die Abb. 128a zeigt den Ball nach erfolgtem Kraftstoß, durch welchen dem Ball die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ erteilt wurde. Sofort wirkt auf den Ball die nach unten gerichtete Gewichtskraft $\vec{F}_G$, die der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ entgegen wirkt und ihn abbremst. Um keine Missverständnisse aufkommen zu lassen, wurden in Abb. 128 nur die Geschwindigkeitsvektoren und keine Kräfte eingezeichnet.

Würde $\vec{F}_G$ nicht wirken, dann würde sich der Ball mit konstanter Geschwindigkeit gleichförmig nach oben bewegen. So lässt sich die Bewegung des Fußballs als eine Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung nach oben und einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung (freier Fall) nach unten auffassen. Da Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ und Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}(t)$ in exakt entgegengesetzte Richtungen zeigen, wird der Ball abgebremst: $|\vec{v}(t_2)| < |\vec{v}(t_1)|$. Die in Abb. 128b dargestellte Aufstiegsphase ist genau dann beendet, wenn $|\vec{v}_0| = |\Delta\vec{v}(t)|$, also beide Vektorpfeile gleich lang sind. Dann ist das Tempo des Balles $u(t) = |\vec{v}(t)| = 0$ und der höchste Punkt $y_{\max}$ erreicht, wie dies Abb. 128c zeigt. Durch die weiterhin konstant wirkende Gewichtskraft $\vec{F}_G$ wird $|\Delta\vec{v}(t)|$ zu jedem Zeitpunkt größer und der Ball wird nun nach unten beschleunigt: $|\vec{v}(t_2)| > |\vec{v}(t_1)|$. Die in Abb. 128d dargestellte Abstiegsphase endet mit dem Auftreffen des Balles auf dem Rasen mit maximalem Tempo. Aus diesen Überlegungen lässt sich nun die Beschleunigung-Zeit-Funktionsgleichung direkt angeben:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{313}$$

Die Geschwindigkeit-Zeit-Funktionsgleichung ergibt sich einfach durch einen geschlossenen Polygonzug (→ Kap. 2.2.2, S. 10):

$$\vec{v}_0 + \Delta\vec{v}(t) - \vec{v}(t) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{v}(t) = \Delta\vec{v}(t) + \vec{v}_0$$

Jetzt werden die Komponenten der Vektoren eingesetzt (→ Abb. 130, S. 209):

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Delta v_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \cdot t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \cdot t + v_{0y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -9,81 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t + 6 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{314}$$

Zur Entwicklung der Ort-Zeit-Funktionsgleichung werden die vier in Abb. 129 dargestellten Zeitpunkte der Bewegung des Balles betrachtet.

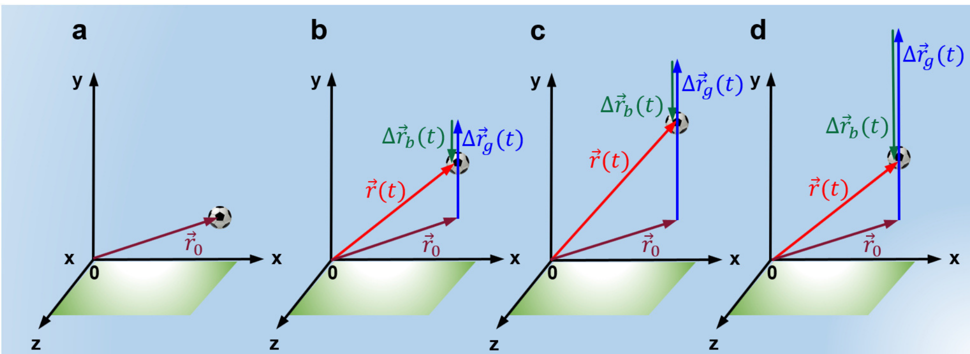


Abb. 129: Ortsverschiebungsvektoren eines nach oben geschossenen Fußballs

Der aktuelle Ort des Balles $\vec{r}(t)$ setzt sich zu jedem Zeitpunkt aus dem Anfangsort $\vec{r}_0$, der Ortsverschiebung infolge der gleichförmigen Bewegung $\Delta\vec{r}_g(t)$ und der Ortsverschiebung infolge der gleichmäßig beschleunigten Bewegung $\Delta\vec{r}_b(t)$, wie dies in den Abb. 129a bis 129d dargestellt wird, zusammen. Die Ort-Zeit-Funktionsgleichung ergibt sich wieder durch einen geschlossenen Polygonzug (→ Kap. 2.2.2, S. 10):

$$\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}_g(t) + \Delta\vec{r}_b(t) - \vec{r}(t) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}_b(t) + \Delta\vec{r}_g(t) + \vec{r}_0$$

Nun werden die Komponenten der Vektoren eingesetzt (→ Abb. 130, S. 209):

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\Delta y_b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta y_g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_{0y} \cdot t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t + y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 8 \ \mathrm{m} \\ -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 + 6 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t + 1 \ \ \mathrm{m} \\ 3 \ \mathrm{m} \end{pmatrix} \tag{315}$$

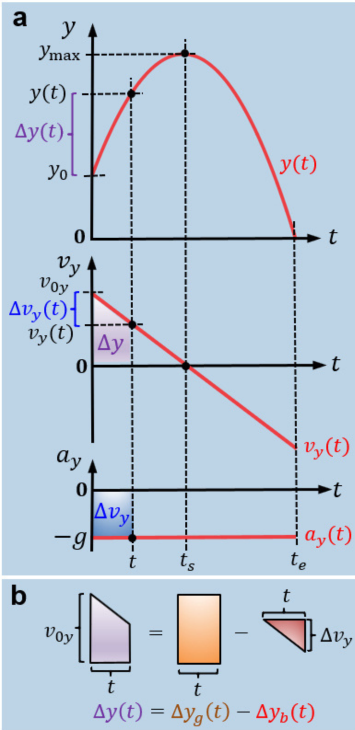


Abb. 130: Schuss nach oben

Mit Hilfe der in Abb. 130 dargestellten Diagramme sollen die kinematischen Funktionsgleichungen (314) und (315), S. 208 mit Hilfe ihrer Diagramme veranschaulicht werden. Dazu wird zuerst die Fläche zwischen t-Achse und $a_x(t)$-Kurve in Abb. 130a betrachtet, die der Geschwindigkeitsänderung $\Delta v_y(t)$ im Zeitintervall von 0 bis t entspricht. So wird aus $\Delta v_y(\Delta t)$ ein $\Delta v_y(t)$. Da Flächeninhalte grundsätzlich positiv sind, ergibt sich der Flächeninhalt hier mit $\Delta v_y(t) = g \cdot t$. Das negative Vorzeichen von g bezieht sich auf die Richtung der y-Achse des Koordinatensystems und wird an anderer Stelle noch berücksichtigt.
Die Trapezfläche zwischen der $v_y(t)$-Kurve und der t-Achse entspricht der Ortsverschiebung des Balles zum Zeitpunkt t. Die Abb. 130b zeigt, dass sich die Ortsverschiebung $\Delta y(t)$ (Trapez) aus der Ortsverschiebung infolge der gleichförmigen Bewegung nach oben $\Delta y_g(t)$ (Rechteck) abzüglich der Ortsverschiebung infolge der beschleunigten Bewegung nach unten $\Delta y_b(t)$ (Dreieck) zusammensetzt. Genau hier erfolgt die Berücksichtigung des negativen Vorzeichens von g. Durch den überlagerten freien Fall ist also die Ortsverschiebung des Balles um das Dreieck geringer als ohne. Nun kann die für den vertikalen Schuss nach oben charakteristische y-Komponente der Ort-Zeit-Funktion (→ Gl. (315), S. 208) nochmals mit Hilfe der in Abb. 130b dargestellten Flächen hergeleitet werden:

$$\underbrace{\Delta y(t)}_{\text{Trapez}} = \underbrace{\Delta y_g(t)}_{\text{Rechteck}} - \underbrace{\Delta y_b(t)}_{\text{Dreieck}}$$

$$\underbrace{\Delta y(t)}_{\text{Trapez}} = -\underbrace{\Delta y_b(t)}_{\text{Dreieck}} + \underbrace{\Delta y_g(t)}_{\text{Rechteck}}$$

$$\Delta y(t) = -\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\Delta v_y(t)}_{g \cdot t} \cdot t + v_{0y} \cdot t$$

$$\underbrace{\Delta y(t)}_{y(t) - y_0} = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t + y_0$$

Mit den nun vorliegenden Funktionsgleichungen können die gesuchten Werte berech-

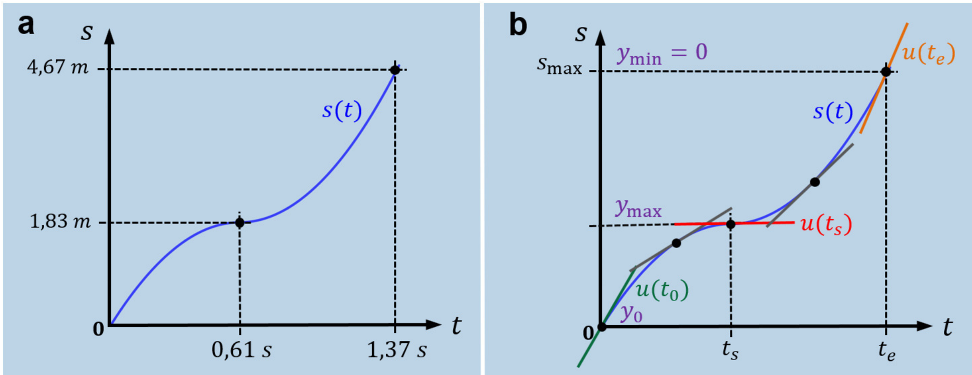


Abb. 132: Weg-Zeit-Diagramme eines nach oben geschossenen Fußballs

Da Wege niemals abnehmen können, ist dies auch gar nicht anders möglich. Die Steigung der Steigungstangenten in Abb. 132b entsprechen dem jeweiligen Momentantempo des Fußballs (→ Kap. 3.2.4, S. 32):

$$u(t) = |\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt}$$

Da die $s(t)$-Kurve während der gesamten Bewegung parabelförmig ist, also durch ein Polynom 2. Grades beschrieben werden kann, ist die Steigungsfunktion linear. So nimmt das Tempo bis t_s linear ab, ist im Umkehrpunkt bei t_s null (waagerechte Tangente) und nimmt dann wieder bis t_e linear zu. Das größte Tempo dieser Bewegung wird bei t_e mit dem Auftreffen des Balles auf dem Rasen erreicht, da $y(t_e) < y_0$ ist.

An diesem Beispiel soll noch gezeigt werden, wie sich das Weg-Zeit-Diagramm mit Hilfe des frei erhältlichen Software-Paketes GeoGebra computergestützt darstellen lässt. Dazu werden die Zahlenwerte in das Linienintegral Gl. (318), S. 212 eingesetzt:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(-g \cdot t + v_{0y})^2} \cdot dt = \int_0^t \sqrt{\left(-9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t + 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} \cdot dt \qquad (323)$$

Nun kann Gl. (323) in die Eingabezeile von GeoGebra eingegeben werden. Sobald man in die Eingabezeile $f(x) = Inte$ eingegeben hat, öffnet sich ein Kontextmenü und man wählt $Integral(< Funktion >, < Variable >)$ aus. Dies ist deshalb wichtig, da hier die obere Grenze die Variable t bzw. in GeoGebra x selber ist und diese einen mathematisch uneingeschränkten Definitionsbereich hat. Solche Integrale werden uneigentliche Integrale genannt. Physikalisch ist der Definitionsbereich natürlich eingeschränkt, denn wenn der Ball den Rasen zum Zeitpunkt t_e erreicht hat, endet der Definitionsbereich aller für diese Aufgabe entwickelten kinematischen Funktionsgleichungen.

Die Eingabezeile enthält jetzt folgenden Ausdruck, wobei das x in GeoGebra natürlich der Zeit t in Gl. (323), S. 215 entspricht:

$$f(x) = Integral(< Funktion >, < Variable >)$$

Nach Eingabe von Funktion und Variable, sieht die Eingabezeile nun so aus:

$$f(x) = Integral(sqrt((-9.81 * x + 6) \wedge 2), x)$$

Nach Bestätigung durch Enter wird der Graph und die von GeoGebra ermittelte Funktionsgleichung der Stammfunktion, also das gelöste Integral, sofort angezeigt:

$$f(x) = \left(-\frac{981}{200} \cdot x^2 + 6 \cdot x\right) \operatorname{sgn}\left(-\frac{981}{100} \cdot x + 6\right) - \frac{200}{109} \operatorname{sgn}\left(-\frac{981}{100} \cdot x + 6\right)$$

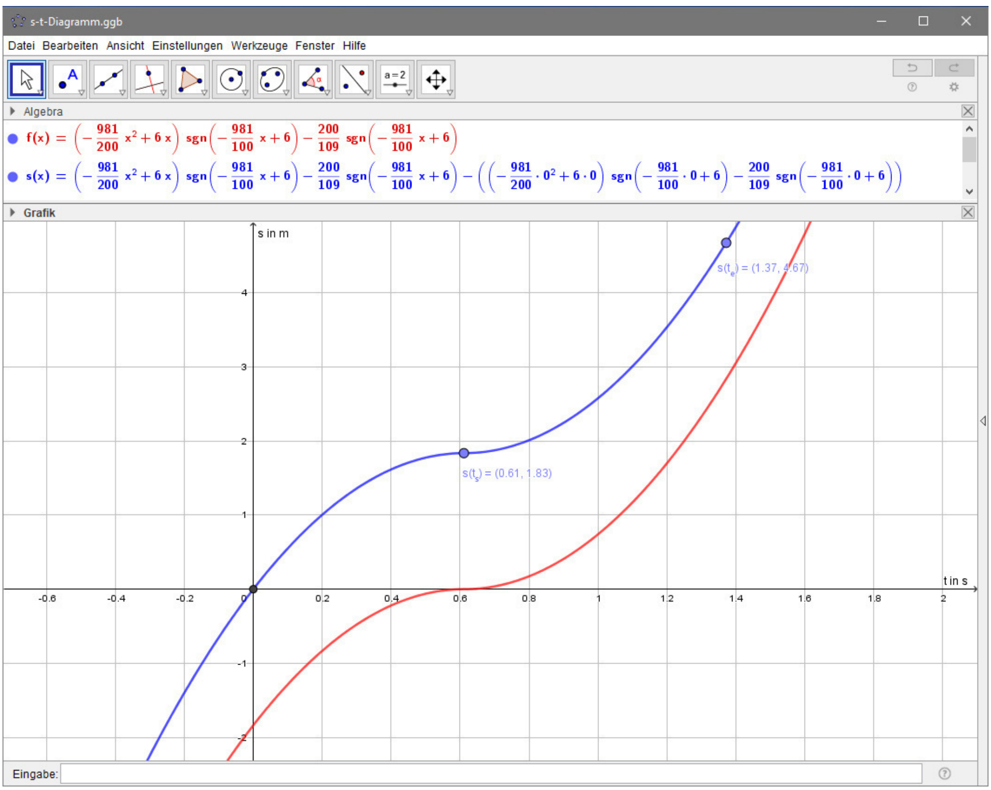


Abb. 133: Weg-Zeit-Diagramme des vertikalen Schusses nach oben mit GeoGebra

Die von GeoGebra ausgegebene (rote) $f(x)$-Kurve in Abb. 133 hat den gleichen Verlauf, wie die $s(t)$-Kurven in Abb. 132, S. 215, ist aber um 1,83 nach unten verschoben.

Bewegungsgleichung $|\vec{a}_y| \sim |\vec{F}_{\text{res}}|$ ist, hat die Beschleunigung zum Zeitpunkt t_0 ihren größten Wert: $|\vec{a}_y| = g$. Ein Hinweis zum Vorzeichen: Das negative Vorzeichen von $\vec{F}_{\text{res}}$ und somit auch das von $\vec{a}_y$ gibt nur die Richtung bezüglich des gewählten Koordinatensystems an.
Der Einfluss der Luftreibung setzt jedoch sobald die Kugel frei fällt ein, $|\vec{F}_{\text{res}}|$ und $|\vec{a}_y|$ nehmen ab. Falls die Kugel bei einer entsprechend großen Anfangshöhe lange genug in der Luft ist, wird irgendwann $|\vec{F}_L| = |\vec{F}_G|$ und damit auch $|\vec{F}_{\text{res}}| = 0$. Dadurch wird $|\vec{a}_y| = 0$ und die Kugel erreicht ihre maximale Geschwindigkeit.

Mit Gl. (358), S. 236 kann jetzt die Fallzeit t_F - eigentlich ein Intervall - berechnet werden. Die Berechnungen erfolgen mit den entsprechenden Speicherwerten, also allen verfügbaren Nachkommastellen, des Taschenrechners:

$$\begin{aligned}
\underbrace{y(t)}_{0} &= 191\ \text{m} - 289,22\ \text{m} \cdot \ln\left(\cosh\left(0,1841\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right)\right) \\
-191\ \text{m} &= -289,22\ \text{m} \cdot \ln\left(\cosh\left(0,1841\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t_F\right)\right) \\
\frac{191\ \text{m}}{289,22\ \text{m}} &= \ln\left(\cosh\left(0,1841\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t_F\right)\right) \\
0,66 &= \ln\left(\cosh\left(0,1841\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t_F\right)\right) \\
e^{0,66} &= \cosh\left(0,1841\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t_F\right) \\
1,9356 &= \cosh\left(0,1841\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t_F\right) \\
\operatorname{arcosh}(1,9356) &= 0,1841\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t_F \\
1,2789 &= 0,1841\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t_F \\
t_F &= \frac{1,2789}{0,1841\ \frac{1}{\text{s}}} \\
&= 6,94\ \text{s}
\end{aligned} \tag{359}$$

Setzt man die Fallzeit in Gl. (355), S. 235 ein, ergibt sich die Beschleunigung $a_y(t_F)$ zu dem Zeitpunkt, an dem die Kugel den Fluss $y(t_F) = 0$ erreicht:

$$a_y(t_F) = -9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\cosh^2\left(0,1841\ \frac{1}{\text{s}} \cdot t_F\right)}$$

$$a_y(6,94\ \mathrm{s}) = -9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1}{\cosh^2\left(0,1841\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 6,94\ \mathrm{s}\right)}$$
$$= -2,63\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{360}$$

Da die Beschleunigung mit $|\vec{a}_y(t_F)| > 0$ ist, wird die Kugel während des gesamten freien Falls beschleunigt. Der Betrag der Luftreibungskraft $|\vec{F}_L|$ ist immer kleiner als der Betrag der Gewichtskraft $|\vec{F}_G|$ und damit ist der Betrag der resultierenden Kraft $|\vec{F}_{\mathrm{res}}|$ immer größer als null (→ Abb. 141, S. 228). Die von der Kugel erreichte Höchstgeschwindigkeit ergibt sich also durch Einsetzen von t_F in Gl. (353), S. 235:

$$v_y(t_F) = -53,2658\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \tanh\left(0,1841\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t_F\right)$$
$$v_y(6,94\ \mathrm{s}) = -53,2658\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \tanh\left(0,1841\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 6,94\ \mathrm{s}\right)$$
$$= -45,60\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -164,18\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{361}$$

Wie auch beim senkrecht nach oben geschossenen Ball (→ Aufgabe 8.3, S. 206), lässt sich die Bewegung des freien Falls mit Luftreibung mit ihrer nicht homogenen und nicht linearen DGL (→ Gl. (342), S. 229) besonders gut mit Hilfe von Modellbildungssystemen behandeln:

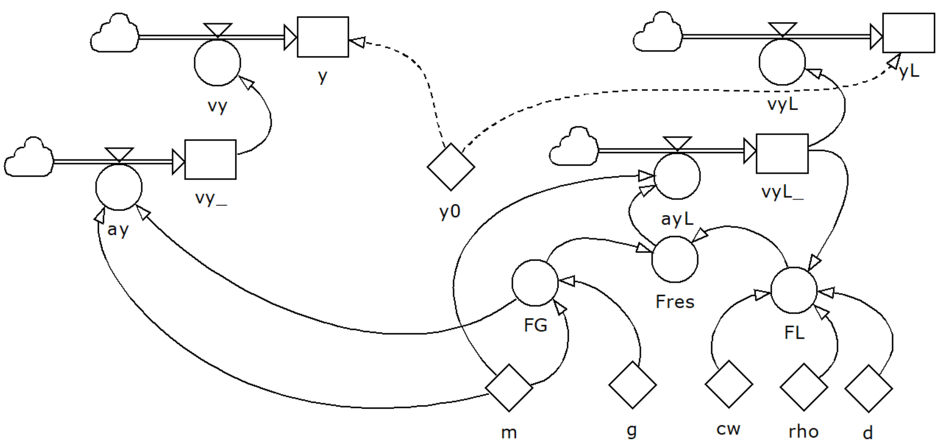


Abb. 145: Powersim-Modell einer frei fallenden Kugel ohne (links) und mit (rechts) Luftreibung

Das Powersim-Modell in Abb. 145 zeigt auf der linken Seite den freien Fall ohne, und auf der rechten Seite mit Luftreibung. So lässt sich der Einfluss der Luftreibung an den folgenden Diagrammen Abb. 146 und Abb. 147, S. 239 unmittelbar erkennen.

Gl. (362) zeigt die Gleichungen und Konstanten des Modells (→ Gl. (352), S. 234):

$$
\begin{gathered}
FG = m \cdot g, \quad FL = 0,5 \cdot cw \cdot \rho \cdot (d/2)^2 \cdot \pi \cdot vyL\_^2 \\
F_{\text{res}} = FG + FL, \quad ayL = F_{\text{res}}/m, \quad ay = FG/m \\
m = 0,01391, \quad g = -9,81, \quad cw = 0,45, \quad \rho = 1,21, \quad d = 0,015, \quad y0 = 191
\end{gathered} \tag{362}
$$

Die in Abb. 146 (links) dargestellten Ort-Zeit-Diagramme unterscheiden sich in ihrem parabelförmigen Verlauf nicht wesentlich voneinander. Die Berücksichtigung der Luftreibung führt lediglich zu einer größeren Fallzeit t_F.
Der Vergleich der Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme in Abb. 146 (rechts) zeigt hingegen sehr deutlich, wie das Tempo der Kugel $|\vec{v}_y(t)|$ infolge der zunehmenden Luftreibungskraft $|\vec{F}_L|$ nicht mehr linear zunimmt, wie beim freien Fall ohne Luftreibung:

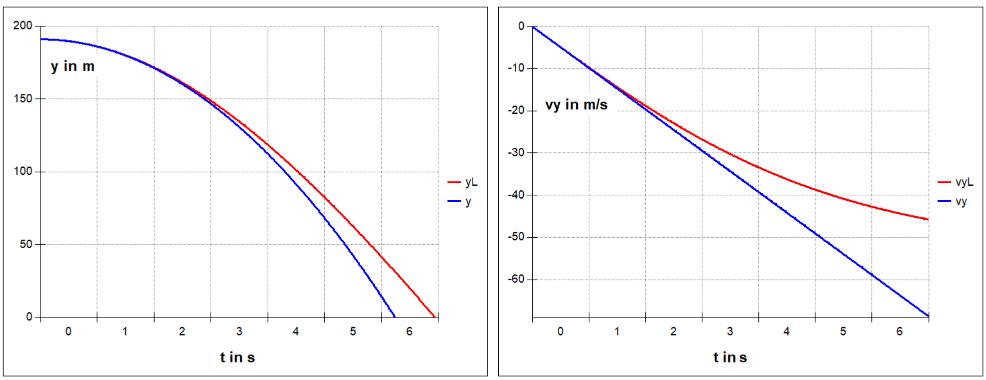


Abb. 146: Ort-Zeit-Diagramme (links) und Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme (rechts)

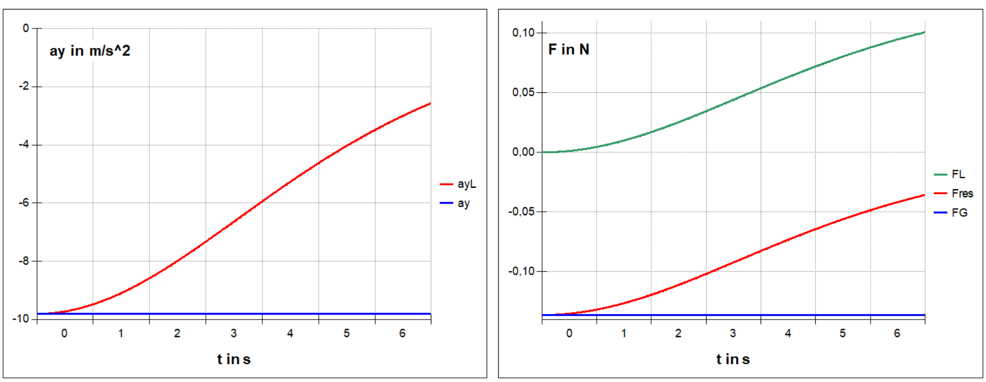


Abb. 147: Beschleunigung-Zeit-Diagramme (links) und Kraft-Zeit-Diagramme (rechts)

Vergleicht man die mit den Gl. (394) und Gl. (395), S. 249 berechneten Werte der Geschwindigkeit und der Beschleunigung zur Fallzeit mit den Simulationswerten in Abb. 154, dann stimmen sie ausgezeichnet überein:

t in s	ay in m/s^2	vy in m/s	y in m	ayF in m/s^2	vyF in m/s	yF in m	Fres in N	FF in N	FG in N
0,9193	-9,81	-9,02	-2,15	-0,64	-3,09	8,36e-4	-0,0031	0,0437	-0,0468
0,9194	-9,81	-9,02	-2,15	-0,64	-3,09	5,26e-4	-0,0031	0,0437	-0,0468
0,9195	-9,81	-9,02	-2,15	-0,64	-3,09	2,17e-4	-0,0031	0,0437	-0,0468
0,9196	-9,81	-9,02	-2,15	-0,64	-3,09	-9,21e-5	-0,0031	0,0437	-0,0468

Abb. 154: Simulationswerte zum Zeitpunkt t_F in der vorletzten Zeile

Dies bedeutet zunächst jedoch nur, dass die kinematischen Gleichungen, die aus der DGL entwickelt wurden, und die Iteration, die der Simulation zugrunde liegt, die gleichen Diagramme und Werte liefern. Wie exakt diese Gleichungen und Diagramme aber den wirklichen freien Fall der Aluminiumkugel in Öl beschreiben, müsste mit einem Realexperiment überprüft werden. Davon ausgehend, dass die grundlegende Struktur der DGL jedoch geeignet ist, diese Bewegung zu beschreiben, müssten bei Abweichungen von Realexperiment und Simulation die entsprechenden Parameter angepasst werden.

8.7 Die sportlich gestoßene Kugel

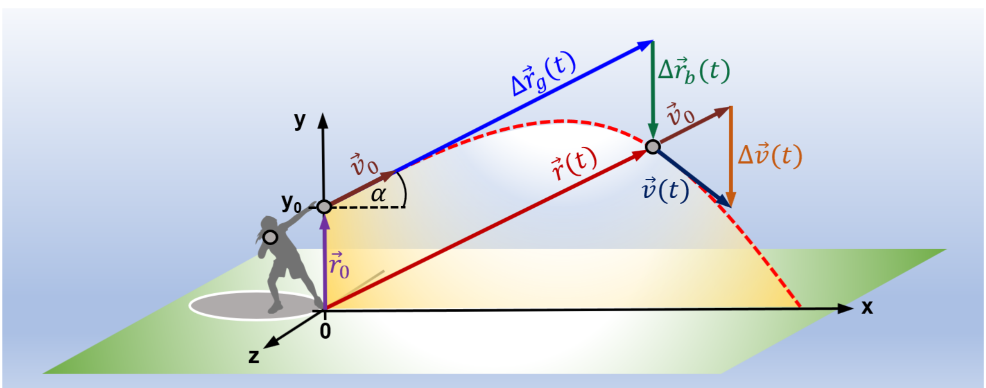


Abb. 155: Bahnkurve und Vektoren einer Kugel beim Kugelstoßen

Die Abb. 155 zeigt die Bahnkurve einer von einem Kugelstoßer gestoßenen Kugel sowie die Ortsvektoren und Geschwindigkeitsvektoren zu einem Zeitpunkt nach Erreichen der maximalen Höhe. Die Abwurfhöhe der Kugel beträgt $y_0 = 2,10$ m und ihre Abwurfgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (10, 8, 0)$ m/s.

Gesucht sind zunächst die kinematischen Funktionsgleichungen für die Bewegung der

Kugel, ohne den Einfluss der Luftreibung zu berücksichtigen. Dann ist der Ort, die Geschwindigkeiten und die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t_1 = 1,2$ s anzugeben. Von Interesse ist weiterhin eine Gleichung für die Wurfweite, die maximale Wurfweite, die maximale Höhe, welche die Kugel auf ihrer Bahnkurve erreicht, die Länge der Bahnkurve sowie eine Gleichung zur Berechnung des optimalen Abwurfwinkels.

Zuerst soll die Ort-Zeit-Funktionsgleichung entwickelt werden. Der aktuelle Ort der Kugel $\vec{r}(t)$ setzt sich zu jedem Zeitpunkt aus dem Anfangsort $\vec{r}_0$, der Ortsverschiebung infolge der gleichförmigen Bewegung $\Delta\vec{r}_g(t)$ und der Ortsverschiebung infolge der gleichmäßig beschleunigten Bewegung $\Delta\vec{r}_b(t)$, wie dies Abb. 155 zeigt, zusammen. Im Gegensatz zum senkrecht nach oben geschossenen Ball (→ Abb. 129, S. 208), bewegt sich die Kugel zusätzlich noch gleichförmig in x-Richtung.

Von daher setzt sich die als schräger Wurf behandelte Bewegung der gestoßenen Kugel aus einer ungestörten Überlagerung, einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung in y-Richtung und einer gleichförmigen Bewegung in x-Richtung zusammen. Man kann darüber hinaus noch die Bewegung in y-Richtung in eine gleichförmige Bewegung nach oben mit gleichzeitig stattfindendem freien Fall nach unten zerlegen.

Die gesuchte Ort-Zeit-Funktionsgleichung ergibt sich auch hier wieder mittels geschlossenen Polygonzugs (→ Kap. 2.2.2, S. 10):

$$\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}_g(t) + \Delta\vec{r}_b(t) - \vec{r}(t) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}_b(t) + \Delta\vec{r}_g(t) + \vec{r}_0$$

Nun werden die Komponenten der Vektoren eingesetzt (→ Abb. 155, S. 251):

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\Delta y_b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_g \\ \Delta y_g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{0x}\cdot t \\ v_{0y}\cdot t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}\cdot t \\ -\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 + v_{0y}\cdot t + y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{397}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot t \\ -\frac{1}{2}\cdot 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t^2 + 8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot t + 2,10\ \mathrm{m} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{398}$$

Mit Gl. (398) kann jetzt der Ort der Kugel zum Zeitpunkt $t = 1,2$ s berechnet werden:

$$\vec{r}(1,2\ \mathrm{s}) = \begin{pmatrix} 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 1,2\ \mathrm{s} \\ -\frac{1}{2}\cdot 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot (1,2\ \mathrm{s})^2 + 8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 1,2\ \mathrm{s} + 2,10\ \mathrm{m} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4,64 \\ 0 \end{pmatrix}\ \mathrm{m}$$

Auch die Geschwindigkeit-Zeit-Funktionsgleichung kann durch einen geschlossenen Polygonzug (→ Kap. 2.2.2, S. 10) hergeleitet werden:

$$\vec{v}_0 + \Delta\vec{v}(t) - \vec{v}(t) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{v}(t) = \Delta\vec{v}(t) + \vec{v}_0$$

Stichwortverzeichnis

Elemente der Kinematik

Die ersten Semester der ingenieur- und naturwissenschaftlichen Studiengänge sind für viele Studenten eine große Herausforderung. Insbesondere in den Mathematik- und Physik-Grundkursen haben sie nicht selten das Gefühl, den Ansprüchen des Studiums nicht gerecht zu werden. Viele Fachhochschulen und Universitäten bieten deshalb entsprechende Vorbereitungskurse an, um vorhandenes Wissen aufzufrischen und Wissenslücken noch vor Studienbeginn zu schließen.

Im Gegensatz zu den Hochschullehrbüchern verzichten die meisten Physik-Schulbücher auf eine konsequent vektorielle Darstellung der Kinematik und behandeln vektorielle Größen einfach wie Skalare. Zusätzlich werden die Größen Ort und Weg nicht konsequent unterschieden und die zur Definition der Geschwindigkeit notwendige Ortsverschiebung erst gar nicht eingeführt. Die so unvermeidbar inkonsistente Darstellung der Kinematik führt zu Problemen und Lernschwierigkeiten, die oft erst in den Grundkursen an den Hochschulen zutage treten. Und genau an dieser Stelle bietet dieses Buch mit einem konsequent vektoriellen Ansatz ein Konzept, das die kinematischen Größen konsistent darstellt und in einen funktionalen Rahmen einordnet.

Wie es der Buchtitel vielleicht schon erahnen lässt, wird hier die Kinematik nicht in ihrer ganzen Breite behandelt. Dafür werden aber die Translationsbewegungen vertiefter dargestellt. Im ersten Teil des Buches werden alle relevanten Größen im dreidimensionalen Raum konsequent vektoriell definiert. An vielen detailliert vorgerechneten Bespielen werden die neu definierten Gleichungen direkt angewendet. Auch eine Einführung in die Systemdynamik, die Schwingungslehre, den Lagrange-Formalismus sowie in die relativistische Kinematik fehlt in diesem Buch nicht.

Zur Vertiefung werden dann im zweiten Teil des Buches Anwendungsaufgaben Schritt für Schritt vorgerechnet, sodass der Rechengang stets nachvollziehbar ist. Auch das Aufstellen und Lösen von Differentialgleichungen wird in diesem Buch nicht vergessen.

Der Autor

Dr. Thomas Amenda ist Oberstudienrat an den BBS Ammerland und unterrichtet dort Physik, Mathematik sowie Technische Informatik.

9 783755 752868

ISBN 978-3-7557-5286-8